Politechnika Wrocławska, Wydział Informatyki i Zarządzania

Optymalizacja

Dla podanych niżej problemów decyzyjnych (zad.1 – zad.5) należy sformułować zadania optymalizacji, tj.:

– określić postać zmiennych decyzyjnych;

– podać postać funkcji celu;

– określić postać ograniczeń na decyzje.

Zad. 1.
Dysponujemy kontenerem transportowym o pojemności V oraz udźwigu P. Należy załadować do niego towar spośród dostępnych N jego rodzajów. Każdy rodzaj towaru charakteryzuje się pewną objętością v_n, ciężarem p_n oraz zyskiem ze sprzedaży c_n $(n = 1, 2, \dots, N)$. Decydując się załadować do kontenera określoną liczbę sztuk każdego spośród N rodzajów towarów, należy maksymalizować wartość załadunku.

Zad. 2. Dla N przedsiębiorstw przygotowano N zleceń transportowych. Każde przedsiębiorstwo wstępnie określa koszt związany z wykonaniem każdego ze zleceń. Mając je dane, należy przyporządkować każdemu przedsiębiorstwu dokładnie jedno zlecenie w taki sposób, aby koszt wykonania wszystkich zleceń był najmniejszy.

Zad. 3. Danych jest M hurtowni oraz N zakładów produkcyjnych, od których zamawiają one produkty do sprzedaży. Ze względy na odległości i jakości dróg, z każdym przewozem zamówionego towaru z m-tego zakładu do n-tej hurtowni wiąże się odpowiedni, znany z góry, koszt transportu. Znane są również możliwości produkcyjne zakładów oraz zapotrzebowanie każdej hurtowni. Sformułować zadanie minimalizacji łącznego kosztu transportu.

Zad. 4. Mamy za zadanie wytworzyć wymagane ilości M rodzajów produktów dysponując N maszynami. Każdy produkt można wytwarzać na dowolnej maszynie, przy czym ze względu na zróżnicowaną wydajność maszyn do wytworzenia jednostki produktu m-tego maszyna n-ta potrzebuje T_{mn} jednostek czasu, co wiąże się z kosztem w wysokości c_{mn}. Do dyspozycji jest T_n jednostek całkowitego czasu n-tej maszyny. Należy przydzielić takie ilości u_{mn} produktu m-tego na n-tą maszynę, by koszt produkcji był minimalny.

Zad. 5. Niech danych będzie N linii transportowych. W pewnym okresie można na n-tej linii wykonać b_n rejsów. Zasoby czasu użytecznego jednej jednostki transportowej typu m wynoszą a_m. W czasie wykonywania n-tego rejsu jednostka transportowa typu m zużywa t_{mn} jednostek czasu, a koszt takiego rejsu wynosi c_{mn}. Należy przydzielić posiadane środki transportu na poszczególne linie w taki sposób, aby przy założeniu, że wszystkie rejsy zostaną wykonane (jeżeli zadanie jest niesprzeczne), łączny koszt był minimalny.

Zad. 6.
Udowodnij, że zbiór $\mathscr{D}_x = \{\|\mathbf{x}\| \leqslant 1\}$ jest wypukły.

Zad. 7.
Korzystając z definicji, zbadaj wypukłość funkcji $f(x) = x^2$

Zad. 8.
Niech F będzie funkcją wypukłą. Udowodnij, że zbiór $\mathscr{D}_\alpha = \left\{\mathbf{x} \in \mathscr{R}^S : F(\mathbf{x}) \leqslant \alpha\right\}$ jest wypukły.

Zad. 9.
Niech funkcje $F_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \ldots, K$ będą wypukłe. Udowodnij, że ich kombinacja liniowa

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k F_k(\mathbf{x}),$$

gdzie $\alpha_k \geqslant 0$ jest wypukła.

Zad. 10.
Niech funkcja g będzie wypukła a funkcja h wypukła i monotonicznie rosnąca. Udowodnij, że ich złożenie $F(\mathbf{x}) = h(g(\mathbf{x}))$ jest funkcją wypukłą.

Zad. 11.
Zbadaj wypukłość poniższych funkcji, zapisz je w postaci macierzowej

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$$

i zilustruj na wykresach:

a) $-2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1 + 6x_2$

b) $4x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_1 + x_2$

c) $-x_1^2 - 6x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1 - 10x_2$

d) $6x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_1 - 3x_2$

e) $2x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$

Zad. 12.
Zbadaj określoność macierzy diagonalnej o nieujemnych elementach na przekątnej.

Zad. 13.
Wyznacz ekstremum funkcji $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$ przy założeniu, że macierz $\mathbf{A}$ jest symetryczna i dodatnio określona.

Zad. 14.
Zbadaj określoność poniższych macierzy i zilustruj (np. na komputerze) na wykresach odpowiadające im formy kwadratowe:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zad. 15.
Wyznacz ekstrema funkcji:

a) $F(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1 + 3$

b) $F(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 6x_1x_2 - 48x_1$

c) $F(\mathbf{x}) = 10x_1^2 + 10x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 9x_1 + 3x_3 + 1.25$

Zapisz powyższe funkcje w postaci formy kwadratowej.

Zad. 16.
Znajdź minimum funkcji $F(\mathbf{x})$ przy ograniczeniach $\mathbf{x} \in \mathscr{D}_x$ posługując się metodą Lagrange'a:

a) $F(\mathbf{x}) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 3)^2$

$$\mathscr{D}_x = \{\mathbf{x} \in \mathscr{R}^3 : \; x_1 + x_2 + x_3 = 9\}$$

b) $F(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2$

$$\mathscr{D}_x = \{\mathbf{x} \in \mathscr{R}^3 : \; x_1^2 + x_2^2 = 0\}$$

c) $F(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

$$\mathscr{D}_x = \{\mathbf{x} \in \mathscr{R}^3 : \; -x_1 + x_3 = 0 \; \wedge \; -x_1 - x_2 + x_3 = -5\}$$

d) $F(\mathbf{x}) = x^{(1)} + x^{(2)}$

$$\mathscr{D}_x = \{\mathbf{x} \in \mathscr{R}^3 : \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2 \; \wedge \; x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 3\}$$

e) $F(\mathbf{x}) = x_1 x_2$

$$\mathscr{D}_x = \left\{\mathbf{x} \in \mathscr{R}^2 : \; (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1\right\}$$

f) $F(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$\mathscr{D}_x = \{\mathbf{x} \in \mathscr{R}^3 : \; x_1 + x_2 + x_3 = 1 \; \wedge \; x_1 - x_2 + x_3 = 7\}$$

g) $F(\mathbf{x}) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$

$$\mathscr{D}_x = \{\mathbf{x} \in \mathscr{R}^3 : \; x_1 + x_2 + x_3 = 3\}$$

Zad. 17.
Znajdź wymiary cylindrycznej puszki maksymalizujące jej objętość przy zadanej powierzchni
$P = 24\Pi$.

Zad. 18.
Znajdź minimum funkcji $F(\mathbf{x})$ przy ograniczeniach $\mathbf{x} \in \mathscr{D}_x$ korzystając z warunków Kuhna-Tuckera:

a) $F(\mathbf{x}) = -(x_1-2)^2 - (x_2-3)^2$

$$\mathscr{D}_x = \{\mathbf{x} \in \mathscr{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 52\}$$

b) $F(\mathbf{x}) = (x_1)^2 + x_2^2$

$$\mathscr{D}_x = \{\mathbf{x} \in \mathscr{R}^2 : \ x_1 - 10 \leqslant 0 \ \wedge \ x_1 - x_2^2 - 4 \geqslant 0\}$$

c) $F(\mathbf{x}) = -6x_1 - x_2$

$$\mathscr{D}_x = \left\{\mathbf{x} \in \mathscr{R}^2 : \ -(x_1-1)^2 + x_2 \leqslant 0 \ \wedge \ -x_1 \leqslant 0 \ \wedge \ -x_2 \leqslant 0\right\}$$

d) $F(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2$

$$\mathscr{D}_x = \{\mathbf{x} \in \mathscr{R}^2 : \ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6 \ \wedge \ -x_1 + x_2 \leqslant 2 \ \wedge \ x_2 \geqslant 0\}$$

e) $F(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 2x_2^2$

$$\mathscr{D}_x = \{\mathbf{x} \in \mathscr{R}^2 : \ x_1 + x_2 \leqslant 1 \ \wedge \ x_1 \geqslant 0 \ \wedge \ x_2 \geqslant 0\}$$

f) $F(\mathbf{x}) = x_1 x_2$

$$\mathscr{D}_x = \{\mathbf{x} \in \mathscr{R}^2 : \ x_1 \geqslant 0 \ \wedge \ x_2 \geqslant 0\}$$

Zad. 19. – *programowanie liniowe*
Należy zaplanować produkcję zakładu w pewnym tygodniu w taki sposób, aby osiągnięty zysk był maksymalny. Zakład może wytwarzać dwa produkty: P_1 i P_2. Ich produkcja jest limitowana dostępnymi zasobami trzech środków: S_1, S_2 i S_3. Zasoby tych środków wynoszą, odpowiednio: 14, 8 i 16 jednostek. Nakład środka S_1 na wytworzenie jednostki produktu P_1 wynosi 2 jednostki, a na wytworzenie produktu P_2 również 2 jednostki. Nakłady środka S_2 wynoszą, odpowiednio 1 i 2 jednostki, natomiast środka S_3: 4 i 0 jednostek. Zysk osiągany z wytworzenia jednostki produktu P_1 wynosi 2 jednostki a wytworzenia jednostki produktu P_2: 3 jednostki.
Zadanie a): Sformułować i rozwiązać zadanie optymalizacji, którego celem będzie maksymalizacja zysku.
Zadanie b): Weź dodatkowo pod uwagę, że zarząd firmy ustalił łączne rozmiary produkcji, które nie mogą być mniejsze od 3 jednostek.

Zad. 20. – *programowanie liniowe*
Znajdź metodą simpleks maksimum liniowej funkcji celu $F(\mathbf{x})$ przy liniowych ograniczeniach nierównościowych:

a) $F(\mathbf{x}) = 20x_1 + 10x_2$
$10x_1 - x_2 \leqslant 30$
$2.5x_1 + x_2 \leqslant 25$
$3x_1 + 0.2x_2 \leqslant 25$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$

b) $F(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2$
$x_1 + x_2 \leqslant 30$
$-2x_1 + x_2 \leqslant 4$
$-9x_1 - x_2 \geqslant 144$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$

c) $F(\mathbf{x}) = 2x_1 + 2x_2$
$-x_1 - 2x_2 \geqslant -10$
$3x_1 + 2x_2 \leqslant 18$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$

d) $F(\mathbf{x}) = x_1 + 3x_2$
$20x_1 + 10x_2 \geqslant 300$
$x_1 - 2x_2 \leqslant 20$
$x_1 + x_2 = 1000$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$

e) $F(\mathbf{x}) = 4x_1 + 6x_2$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$
$2x_1 + x_2 \leqslant 7$
$x_1 + x_2 \leqslant 4$
$x_1 + 3x_2 \leqslant 9$

f) $F(\mathbf{x}) = 4x_1 + 6x_2$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$
$2x_1 + x_2 \leqslant 7$
$x_1 + x_2 \geqslant 4$
$x_1 + 3x_2 \leqslant 9$

g) $F(\mathbf{x}) = -3x_1 - 5x_2$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$
$4x_1 + 2x_2 \geqslant 8$
$5x_1 + 6x_2 \leqslant 30$

h) $F(\mathbf{x}) = 2x_1 + 2x - 2$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$
$x_1 + 2x_2 \leqslant 10$
$3x_1 + 2x_2 \leqslant 18$

i) $F(\mathbf{x}) = 5x_1 - 7x_2$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$
$x_1 + 3x_2 \geqslant 3$
$5x_1 + 4x_2 \leqslant 20$

j) $F(\mathbf{x}) = -x_1 + 2x_2$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$
$x_1 + x_2 \geqslant 1$
$2x_1 + x_2 \leqslant 2$

Zad. 21. – *programowanie całkowitoliczbowe*
Rozwiąż poniższe zadania programowania całkowitoliczbowego dla zadanej funkcji celu i przy ustalonych ograniczeniach liniowych:

a) $F(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$
$14x_1 + 9x_2 \leqslant 51$
$-6x_1 + 3x_2 \leqslant 1$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$
$\mathbf{x} \in Z^2$

b) $F(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$
$x_1 + 2x_2 \leqslant 32$
$18x_1 + 3x_2 \leqslant 224$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$
$\mathbf{x} \in Z^2$

c) $F(\mathbf{x}) = -2x_1 - 5x^{(2)}$
$2x_1 - x_2 \geqslant 6$
$x_1 - 6x_2 \geqslant -24$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$
$\mathbf{x} \in Z^2$

d) $F(\mathbf{x}) = -3x_1 - 7x_2$
$3x_1 + 8x_2 \leqslant 24$
$2x_1 + 3x_2 \leqslant 12$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$
$\mathbf{x} \in Z^2$

Dodatek

Zbiór wypukły

Jeżeli dla dowolnych dwóch punktów $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ ze zbioru $\mathscr{D}_x$ punkt $\mathbf{x}$ zadany wzorem

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2$$

również należy do zbioru $\mathscr{D}_x$, wówczas zbiór ten nazywamy wypukłym.

Funkcja wypukła

Jeżeli dla dowolnych dwóch punktów $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ ze zbioru $\mathscr{D}_x$ oraz funkcji $F : \mathscr{D}_x \to \mathscr{R}$ określonej na tym zbiorze zachodzi nierówność

$$F(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) \leqslant \lambda F(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)F(\mathbf{x}_2),$$

wówczas funkcję F nazywamy wypukłą.

Forma kwadratowa

Formą kwadratową nazywamy funkcję $Q(\mathbf{x}) : \mathscr{R}^S \to \mathscr{R}$ o postaci $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ gdzie $\mathbf{x} \in \mathscr{R}^S$ oraz $\mathbf{A} \in \mathscr{R}^{S \times S}$ jest macierzą symetryczną.

Macierz kwadratowa $\mathbf{A}$ jest **dodatnio (ujemnie) określona**, gdy dla dowolnego niezerowego wektora $\mathbf{x}$ zachodzi $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ ($\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$).

Macierz kwadratowa $\mathbf{A}$ jest **dodatnio (ujemnie) półokreślona**, gdy dla dowolnego niezerowego wektora $\mathbf{x}$ zachodzi $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geqslant 0$ ($\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leqslant 0$).

Macierz kwadratowa $\mathbf{A}$ jest **dodatnio określona** wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej wiodące minory główne są większe od zera.

Macierz kwadratowa $\mathbf{A}$ jest **dodatnio półokreślona** wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej minory główne są nieujemne.

Macierz kwadratowa $\mathbf{A}$ jest **ujemnie określona(półokreślona)** wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $-\mathbf{A}$ jest dodatnio określona (półokreślona).

Gradient i Hesjan
Gradientem $\nabla_x F(\mathbf{x})$ funkcji $F : \mathscr{R}^S \to \mathscr{R}$ nazywamy S-wymiarowy wektor pochodnych cząstkowych po wszystkich zmiennych funkcji F, natomiast Hesjanem nazywamy macierz $H(\mathbf{x})$ pochodnych cząstkowych drugiego rzędu o wymiarach $S \times S$:

$$\nabla_x F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_S} \end{bmatrix}, \qquad H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_S} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_S} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_S \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_S \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_S \partial x_S} \end{bmatrix}$$

Warunek wystarczający na istnienie ekstremum w punkcie $\mathbf{x}^*$
Załóżmy, że $\nabla_x F(\mathbf{x}^*) = 0$. Wówczas:

- jeżeli macierz $H(\mathbf{x}^*)$ jest dodatnio określona, to F ma minimum loklane w punkcie $\mathbf{x}^*$
- Jeżeli macierz $H(\mathbf{x}^*)$ jest ujemnie określona, to F ma maksimum loklane w punkcie $\mathbf{x}^*$
- Jeżeli macierz $H(\mathbf{x}^*)$ nie jest ani ujemnie, ani dodatnio półokreślona, to F nie ma ekstremum w punkcie $\mathbf{x}^*$

Uwaga: jeżeli macierz $H(\mathbf{x}^*)$ jest tylko dodatnio (ujemnie) półokreślona, to nie jest możliwe ustalenie, czy funkcja F ma ekstremum loklane w punkcie $\mathbf{x}^*$ czy też nie ma (obie sytuacje mogą mieć miejsce).

Forma kwadratowa jest wypukła (wklęsła) jeżeli jest dodatnio (ujemnie) określona.

Optymalizacja z ograniczeniami równościowymi - funkcja Lagrange'a
Dana jest funkcja $F(\mathbf{x})$, gdzie $\mathbf{x} \in \mathscr{R}^N$ oraz M ograniczeń równościowych $\varphi_m(\mathbf{x}) = 0$; $m = 1, 2, \ldots, M$. Zadanie optymalizacji z ograniczeniami można sprowadzić do zadania optymalizacji bez ograniczeń funkcji Lagrange'a:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = F(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \varphi_m(\mathbf{x}),$$

gdzie $\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_M \end{bmatrix}^T$, jest wektorem tzw. mnożników Lagrange'a. Punkt optymalny jest wówczas rozwiązaniem następującego układu równań:

$$\nabla_x L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0},$$
$$\nabla_\lambda L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}.$$

Jeżeli zachodzi podejrzenie o istnieniu rozwiązań nieregularnych, można je wyznaczyć z tego samego układu równań, z tym, że funkcja Lagrange'a ma wówczas postać:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \varphi_m(\mathbf{x}).$$

Optymalizacja z ograniczeniami nierównościowymi - warunki Kuhna-Tuckera
Dana jest funkcja $F(\mathbf{x})$, gdzie $\mathbf{x} \in \mathscr{R}^N$ oraz M ograniczeń $\psi_m(\mathbf{x}) \leqslant 0$; $m = 1, 2, \ldots, M$. Zadanie optymalizacji z ograniczeniami można sprowadzić do zadania optymalizacji bez ograniczeń funkcji Lagrange'a:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = F(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^{M} \mu_i \psi_m(\mathbf{x}),$$

gdzie $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_M \end{bmatrix}^T$, jest wektorem tzw. mnożników Lagrange'a. Punkt optymalny jest wówczas rozwiązaniem następującego układu:

$$\nabla_x L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0},$$
$$\nabla_\mu L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \leqslant \mathbf{0},$$
$$\mu_m \psi_m(x) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, M,$$
$$\mu_m \geqslant 0, \quad m = 1, 2, \ldots, M.$$