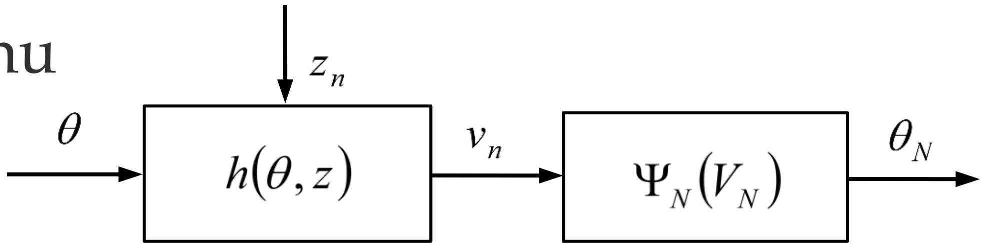
Optymalizacja systemów

Wykład Optymalny pomiar

Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

- Sformułowanie problemu



<u>Opis systemu pomiarowego:</u> $v = h(\theta, z)$

gdzie: $v \in \mathsf{V}$, h – znana funkcja, wzajemnie jednoznaczna względem z

$h : \Theta \times \mathsf{Z} \to \mathsf{V}$, $z = h_z^{-1}(\theta, v)$

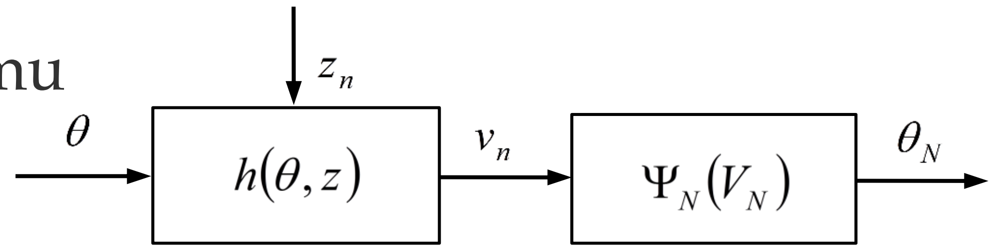
Przykłady funkcji h: $v = h(\theta, z) = \theta + z$

$v = h(\theta, z) = \theta \cdot z$

V – przestrzeń pomiarów($\dim \theta = \dim z = L$)

Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

- Sformułowanie problemu



<u>Zakłócenia pomiarowe:</u>

z_n – wartość zmiennej losowej $\underline{z}$ z przestrzeni Z

$f_z(z)$ – funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej $\underline{z}$

θ – obserwowany wektor wielkości, wartość zmiennej losowej $\underline{\theta}$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathsf{R}^R$

$f_\theta(\theta)$ – funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej $\underline{\theta}$

Wyniki pomiarów: $V_N = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_N \end{bmatrix}$

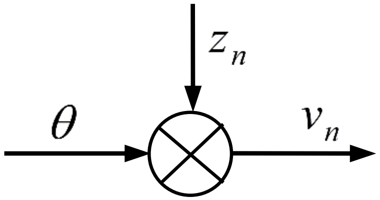
Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

<u>Poszukujemy algorytmu estymacji:</u>

$$\theta_N = \Psi_N\left(V_N\right)$$

- Możliwe rozwiązania:
  - Metoda najmniejszych kwadratów
  - Metoda maksymalnej wiarogodności
  - Metody Bayes'a

Metoda najmniejszych kwadratów



Założenia:

$v = h(\theta, z) = \theta + z$ – zakłócenia addytywne

$\underset{\underline{z}}{E}[\underline{z}] = 0$ – wartość oczekiwana zakłóceń wynosi zero

$\underset{\underline{z}}{Var}[\underline{z}] < \infty$ – skończona wariancja zakłóceń

Empiryczna wariancja zakłóceń:

$$Var_{zN}(V_N, \theta) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(v_n - \theta)^2$$

Algorytm estymacji otrzymujemy minimalizując empiryczną wariancje zakłóceń:

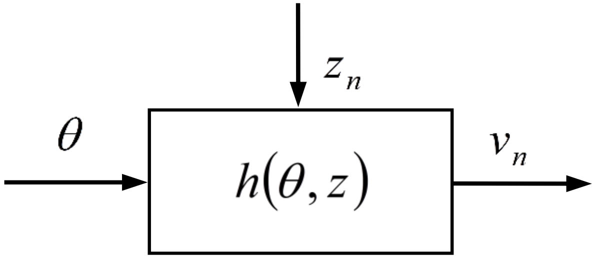
$$\theta_N = \Psi_N(V_N) \quad \rightarrow \quad Var_{zN}(V_N, \theta_N) = \min_{\theta \in \Theta} Var_{zN}(V_N, \theta)$$

Algorytm estymacji:

$$\theta_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} v_n$$

Metoda maksymalnej wiarogodności

Założenia:



$\underline{v} = h(\theta, \underline{z})$ – system pomiarowy opisany jest dowolną funkcją *h,* wzajemnie jednoznaczną względem *z*

Postać funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zakłóceń $f_z(z)$ jest znana

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa obserwowanej zmiennej losowej $\underline{v}$

$$f_v(v,\theta) = f_z\left(h_z^{-1}(\theta, v)\right) \cdot \left|J_h\right|, \qquad \text{gdzie: } J_h = \frac{\partial h_z^{-1}(\theta, v)}{\partial v}$$

gdzie: J_h - Jacobian, macierz przekształcenia odwrotnego.

Funkcja wiarogodności ma postać:

$$L_N(V_N, \theta) = \prod_{n=1}^{N} f_v(v_n, \theta) = \prod_{n=1}^{N} f_z\left(h_z^{-1}(\theta, v_n)\right)\left|J_h\right|,$$

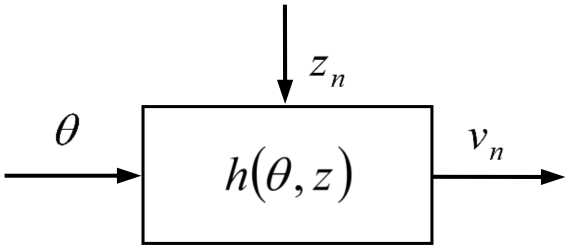
Metoda maksymalnej wiarogodności

Algorytm estymacji otrzymujemy w wyniku maksymalizacji funkcji wiarogodności:

$$\theta_N = \Psi_N\left(V_N\right) \quad \rightarrow \quad L_N\left(V_N, \theta_N\right) = \max_{\theta \in \Theta} L_N\left(V_N, \theta\right)$$

Metoda maksymalnej wiarogodności

- Przykład



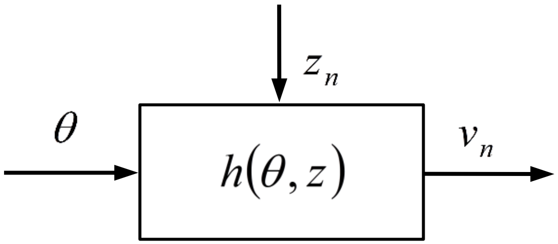
Opis zakłóceń: $$f_z(z) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad z \in [0,1] \\ 0 & \text{for} \quad z \notin [0,1] \end{cases}$$

Opis systemu pomiarowego: $$v = h(\theta, z) = \theta\, z \quad (\theta > 0)$$

$$z = h_z^{-1}(\theta, v) = \frac{v}{\theta}$$

Metoda maksymalnej wiarogodności

- Przykład



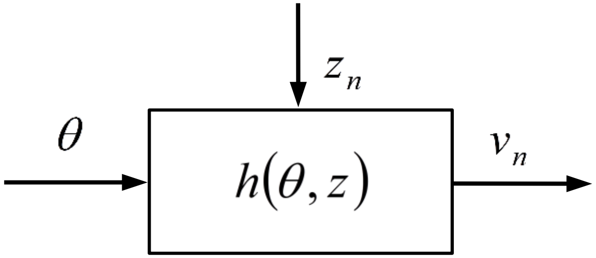
Macierz Jakobiego: $$J_h = \frac{\partial h_z^{-1}(\theta, v)}{\partial v} = \frac{d}{dv}\left(\frac{v}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta}$$

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa obserwowanej zmiennej losowej:

$$f_v(v, \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} & \text{for} \quad \dfrac{v}{\theta} \in [0, 1] \\ 0 & \text{for} \quad \dfrac{v}{\theta} \notin [0, 1] \end{cases}$$

Metoda maksymalnej wiarogodności

- Przykład



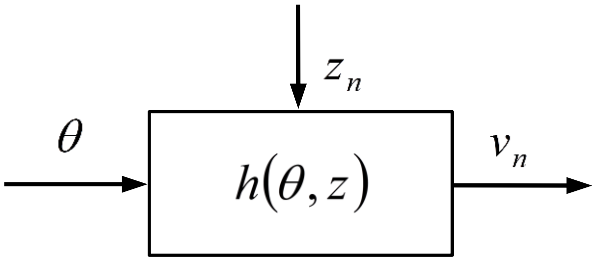
Funkcja wiarogodności:

$$L_N(V_N, \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^N} & \text{for} \quad \forall n = 1, 2, \ldots, N \quad v_n \in [0, \theta] \\ 0 & \text{for} \quad \exists n = 1, 2, \ldots, N \quad v_n \notin [0, \theta] \end{cases}$$

$$L_N(V_N, \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^N} & \text{for} \quad \theta \geq \max\limits_{1 \leq n \leq N} \{v_n\} \\ 0 & \text{for} \quad \theta < \max\limits_{1 \leq n \leq N} \{v_n\} \end{cases}$$

Metoda maksymalnej wiarogodności

- Przykład



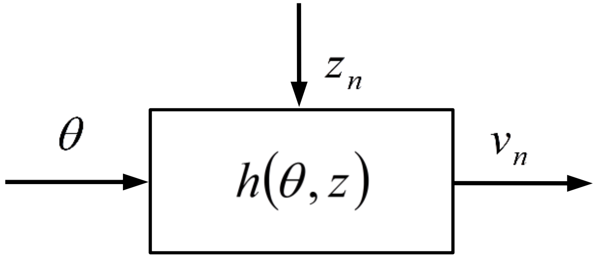
Algorytm estymacji:

$$\theta_N = \Psi_N(V_N) = \max_{1 \le n \le N} \{v_n\}$$

Interpretacja:

$$\theta_N = \max_{1 \le n \le N} \{v_n\} = \max_{1 \le n \le N} \{\theta\, z_n\} = \theta \max_{1 \le n \le N} \{z_n\}$$

Metody Bayes'a



Założenia:

$\underline{v} = h(\theta, \underline{z})$ – system pomiarowy opisany jest dowolną funkcją, wzajemnie jednoznaczną względem z

θ – obserwowany wektor wielkości, wartość zmiennej losowej $\underline{\theta}$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^R$

Postacie funkcji gęstości rozkładów prawdopodobieństwa $f_z(z)$ oraz $f_\theta(\theta)$ są znane .

Dana jest funkcja strat $L(\theta, \overline{\theta})$, gdzie $\overline{\theta}$ jest wartością estymaty obserwowanej wielkości.

Ryzyko:
$$R(\overline{\Psi}) \overset{df}{=} \underset{\underline{\theta},\underline{V_N}}{E}\left[L\left(\underline{\theta}, \underline{\overline{\theta}} = \overline{\Psi}(\underline{V_N})\right)\right] = \int_{\mathbb{V}_N}\int_{\Theta} L\left(\theta, \overline{\Psi}(V_N)\right) f(\theta, V_N)\, d\theta\, dV_N$$

gdzie: $f(\theta, V_N)$ łączny rozkład prawdopodobieństwa

$$f(\theta, V_N) = f'(\theta | V_N) f''(V_N)$$

gdzie f' jest warunkową, a f'' brzegową funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa

Metody Bayes'a

Problem: $\Psi_N \quad \rightarrow \quad R(\Psi_N) = \min\limits_{\overline{\Psi}} R(\overline{\Psi})$

$$R(\overline{\Psi}) = \int\limits_{V_N}\int\limits_{\Theta} L(\theta, \overline{\Psi}(V_N))\, f'(\theta|V_N)\, d\theta\ f''(V_N)\, dV_N$$

$$r(\overline{\theta}, V_N) \overset{\text{df}}{=} \underset{\underline{\theta}}{E}\left[L(\underline{\theta}, \overline{\theta})|V_N\right] = \int\limits_{\Theta} L(\theta, \overline{\theta} = \overline{\Psi}(V_N))\, f'(\theta|V_N)\, d\theta$$

gdzie: r – ryzyko warunkowe

Problem sprowadza się do następującego zadania :

$$\theta_N = \Psi_N(V_N) \quad \rightarrow \quad r(\theta_N, V_N) = \min_{\overline{\theta} \in \Theta} r(\overline{\theta}, V_N)$$

Metody Bayes'a

Gdzie funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa a posteriori:

$$f'(\theta|V_N)=\frac{f_\theta(\theta)\,f_{VN}(V_N|\theta)}{\int\limits_\Theta f_\theta(\theta)\,f_{VN}(V_N|\theta)d\theta}=\frac{f_\theta(\theta)\prod\limits_{n=1}^{N} f_v(v_n|\theta)}{\int\limits_\Theta f_\theta(\theta)\prod\limits_{n=1}^{N} f_v(v_n|\theta)d\theta}=$$

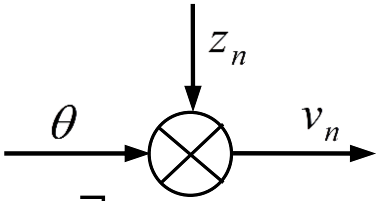
$$=\frac{f_\theta(\theta)\prod\limits_{n=1}^{N} f_z\left(h_z^{-1}(\theta,v_n)\right)|J_h|}{\int\limits_\Theta f_\theta(\theta)\prod\limits_{n=1}^{N} f_z\left(h_z^{-1}(\theta,v_n)\right)|J_h|\,d\theta}=\frac{f_\theta(\theta)\prod\limits_{n=1}^{N} f_z\left(h_z^{-1}(\theta,v_n)\right)|J_h|}{const}$$

$$\int\limits_\Theta f_\theta(\theta)\prod_{n=1}^{N} f_z\left(h_z^{-1}(\theta,v_n)\right)|J_h|\,d\theta=const \quad \text{dla danej serii pomiarowej } V_N$$

$$f'(\theta|V_N)\quad \alpha \quad f_\theta(\theta)\prod_{n=1}^{N} f_z\left(h_z^{-1}(\theta,v_n)\right)|J_h|$$

Metody Bayes'a

- Przykład



Opis zakłóceń:

$$f_z(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right]$$

Rozkład prawdopodobieństwa:

$$f_\theta(\theta) = \frac{1}{\sigma_\theta \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\theta - m_\theta)^2}{2\sigma_\theta^2}\right]$$

Opis systemu pomiarowego:

$$v = h(\theta, z) = \theta + z, \qquad z = h_z^{-1}(\theta, v) = v - \theta$$

Funkcja strat:

$$L(\theta, \bar{\theta}) = -\delta(\theta - \bar{\theta})$$

Metody Bayes'a

- Przykład

Macierz Jakobiego:

$$J_h = \frac{\partial h_z^{-1}(\theta, v)}{\partial v} = \frac{d}{dv}(v-\theta) = 1$$

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa obserwowanej zmiennej:

$$f_v(v|\theta) = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(v-\theta)^2}{2\sigma_z^2}\right]\cdot|1|$$

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa a posteriori

$$f'(\theta|V_N) \quad \alpha \quad f_\theta(\bar{\theta})\prod_{n=1}^{N} f_z\left(h_z^{-1}(\theta, v_n)\right)|J_h| =$$

$$= \frac{1}{\sigma_\theta\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\bar{\theta}-m_\theta)^2}{2\sigma_\theta^2}\right]\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(v_n-\bar{\theta})^2}{2\sigma_z^2}\right]$$

Metody Bayes'a

- Przykład

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa a posteriori po przekształceniach:

$$f'(\theta|V_N) \quad \alpha \quad f_\theta(\bar{\theta})\prod_{n=1}^{N} f_z\left(h_z^{-1}(\bar{\theta},v_n)\right)|J_h| =$$

$$= \frac{1}{\sigma_\theta\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\right)^N \exp\left[-\frac{(\bar{\theta}-m_\theta)^2}{2\sigma_\theta^2}-\sum_{n=1}^{N}\frac{(v_n-\bar{\theta})^2}{2\sigma_z^2}\right]$$

Dla funkcji strat: $L(\theta,\bar{\theta}) = -\delta(\theta-\bar{\theta})$ ryzyko warunkowe:

$$r(\bar{\theta},V_N) \overset{\text{df}}{=} \underset{\underline{\theta}}{E}\left[L(\underline{\theta},\bar{\theta})|V_N\right] = \int_\Theta L\left(\theta,\bar{\theta}=\bar{\Psi}(V_N)\right) f'(\theta|V_N)\,d\theta = -f'(\theta|V_N) \quad \alpha$$

$$\alpha \quad -f_\theta(\bar{\theta})\prod_{n=1}^{N} f_z\left(h_z^{-1}(\bar{\theta},v_n)\right)|J_h| = -\frac{1}{\sigma_\theta\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\right)^N \exp\left[-\frac{(\bar{\theta}-m_\theta)^2}{2\sigma_\theta^2}-\sum_{n=1}^{N}\frac{(v_n-\bar{\theta})^2}{2\sigma_z^2}\right]$$

Metody Bayes'a

- Przykład

W wyniku minimalizacji ryzyka warunkowego otrzymujemy algorytm estymacji:

$$\theta_N = \Psi_N(V_N) = \frac{m_\theta + \left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_z}\right)^2 \sum_{n=1}^{N} v_n}{1 + \left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_z}\right)^2 N}$$

Dyskusja:

1° N – mała liczba pomiarów

$(\sigma_z >> \sigma_\theta)$ – pomiary bezwartościowe

$$\theta_N \approx m_\theta$$

2° $N \to \infty$

$(\sigma_z << \sigma_\theta)$ - dobre pomiary

$$\theta_N \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} v_n$$

Dziękuję za uwagę