

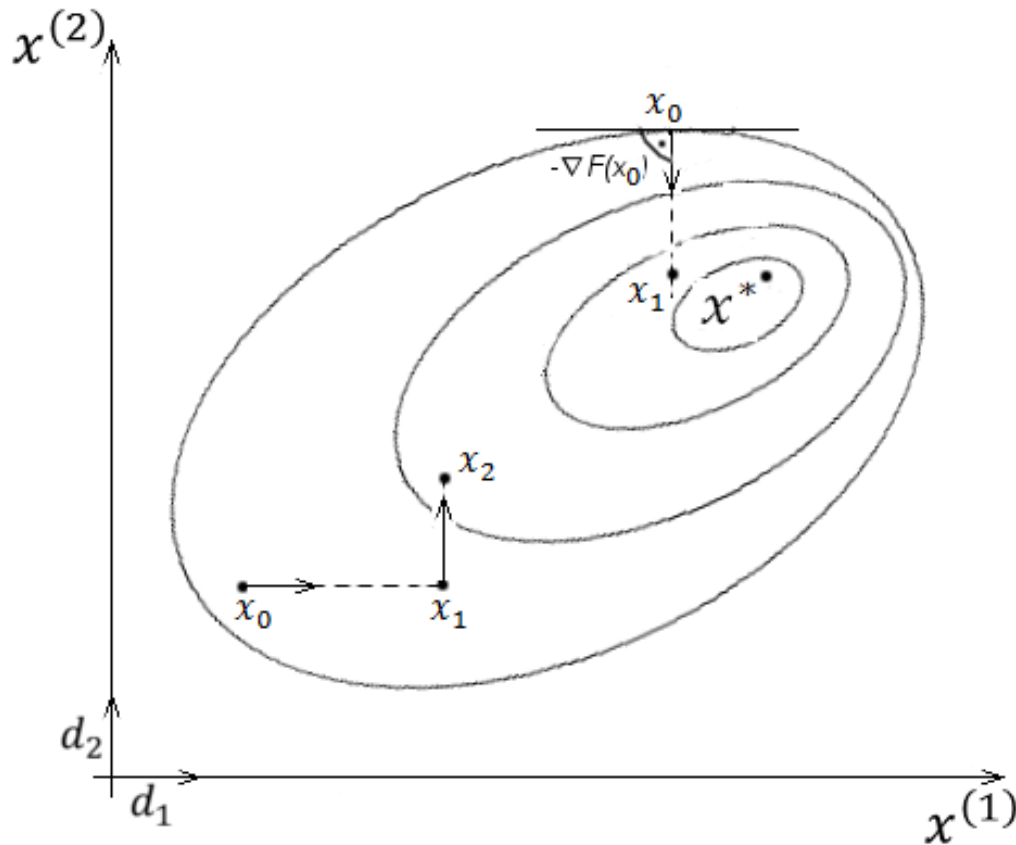


Politechnika Wroclawska

Bezgradientowe metody optymalizacji funkcji wielu zmiennych

informacje dodatkowe

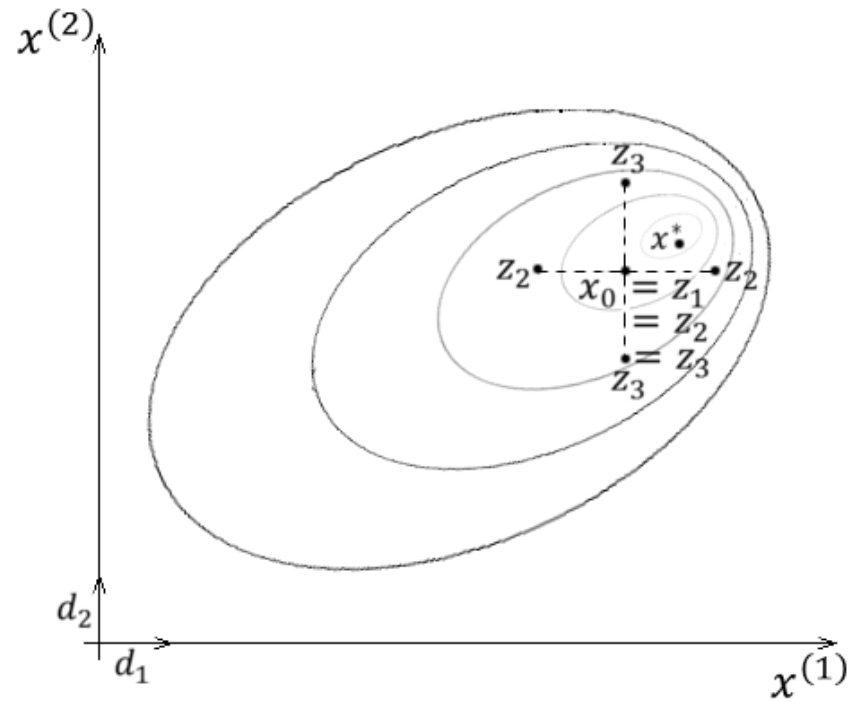
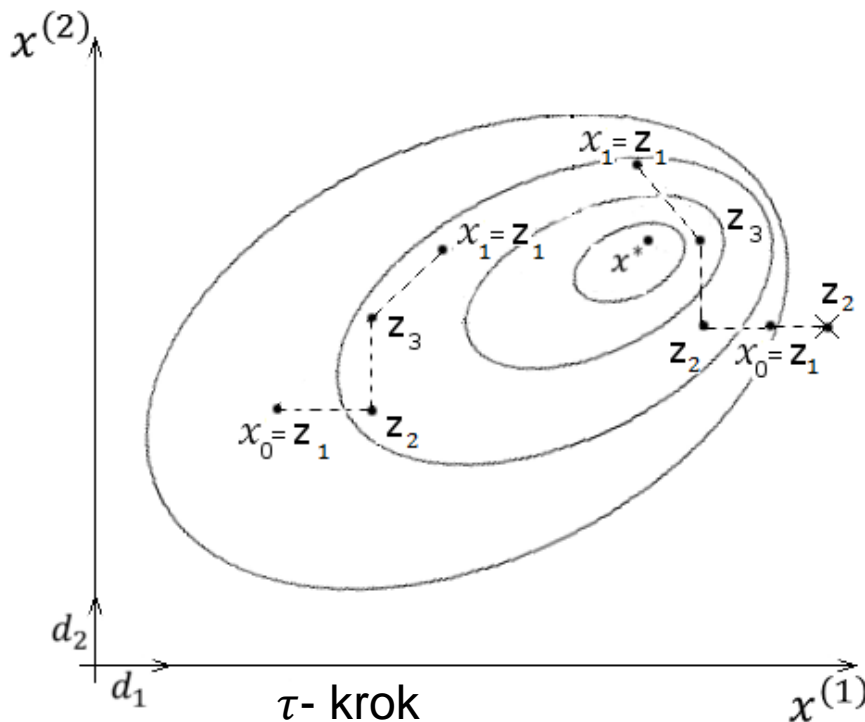
Wybór kierunku poszukiwań



- Kierunki bazowe i ich modyfikacje – metody bezgradientowe.
- Kierunki oparte na gradiencie funkcji – metody gradientowe.



Metoda Hooka-Jeevesa - z krokiem dyskretnym



τ - krok

$\alpha > 1$ współczynnik kroku roboczego

$\beta \in (0,1)$ współczynnika korekcji kroku

$\tau := \tau\beta$



Metoda Hooka-Jeveesa - z krokiem dyskretnym

DANE: $d_1, d_2, \dots, d_S, x_0, \tau, \varepsilon, \alpha, \beta$

Krok 0: $z_1 := x_0, s = 1, n = 0$

Krok 1: $z_{s+1} := z_s + \tau d_s$

Jeśli $F(z_{s+1}) < F(z_s)$ idź do kroku 2

w przeciwnym razie $z_{s+1} := z_s - \tau d_s$

Jeśli $F(z_{s+1}) < F(z_s)$ idź do kroku 2

w przeciwnym razie $z_{s+1} := z_s$

Krok 2: Jeśli $s < S$, $s := s + 1$ idź do kroku 1

w przeciwnym razie

Jeśli $F(z_{s+1}) < F(z_1)$ idź do kroku 3

$\tau := \tau\beta, x_{n+1} := x_n, z_s := x_n, n := n + 1, s = 1$ idź do kroku 1

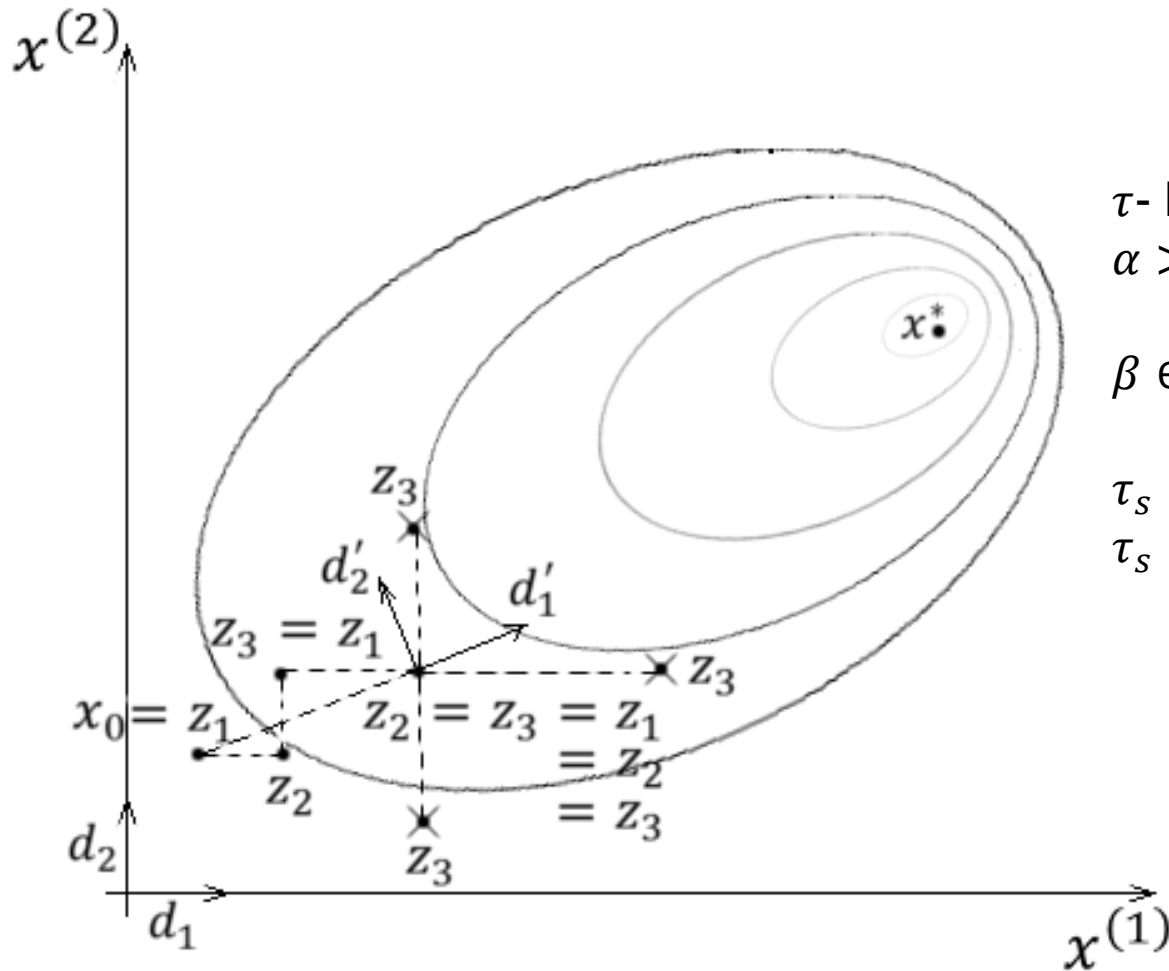
Krok 3: Jeśli $\tau < \varepsilon$, STOP

w przeciwnym razie

$x_{n+1} := z_{s+1} + \alpha(z_{s+1} - z_1), n := n + 1, s := 1$ idź do kroku 1



Metoda Rozenbrocka - z krokiem dyskretnym



τ - krok

$\alpha > 1$ – współczynnik korekcji kroku

$\beta \in (-1, 0)$ - współczynnika korekcji kroku

$$\tau_s := \tau_s \alpha$$

$$\tau_s := \tau_s \beta$$



Metoda Rozenbrocka - z krokiem dyskretnym

DANE: $d_1, d_2, \dots, d_S, x_0, \tau, \varepsilon, \alpha > 1, \beta \in (-1, 0)$

Krok 0: $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_S = \tau, \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_S = 0, z_1 = x_0, n = 0, s = 1$

Krok 1: $z_{s+1} = z_s + \tau_s d_s, \delta_s = \delta_s + \tau_s$
IF $F(z_{s+1}) < F(z_s)$ $\tau_s := \alpha \tau_s \quad s := s + 1$, IDŹ DO KROKU 2
ELSE $F(z_{s+1}) \geq F(z_s)$ $\tau_s := \beta \tau_s \quad s := s + 1$ IDŹ DO KROKU 2

Krok 2: IF $s < S$ $s := s + 1$ IDŹ DO KROKU 1
IF $F(z_{S+1}) < F(z_1)$ $z_1 := z_{S+1} \quad s := 1$ IDŹ DO KROKU 1
IF $F(z_{S+1}) = F(x_n)$
IF $n = 0$ zmień punkt startowy
ELSE $x_{n+1} = z_{S+1}$

Krok 3: IF STOP? (np.: $\|x_{n+1} - x_n\| < \varepsilon$) STOP

Krok 4: Obrót bazy
ELSE $n := n + 1, s = 1$
 $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_S = \tau, \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_S = 0$, IDŹ DO KROKU 1



Obrót bazy

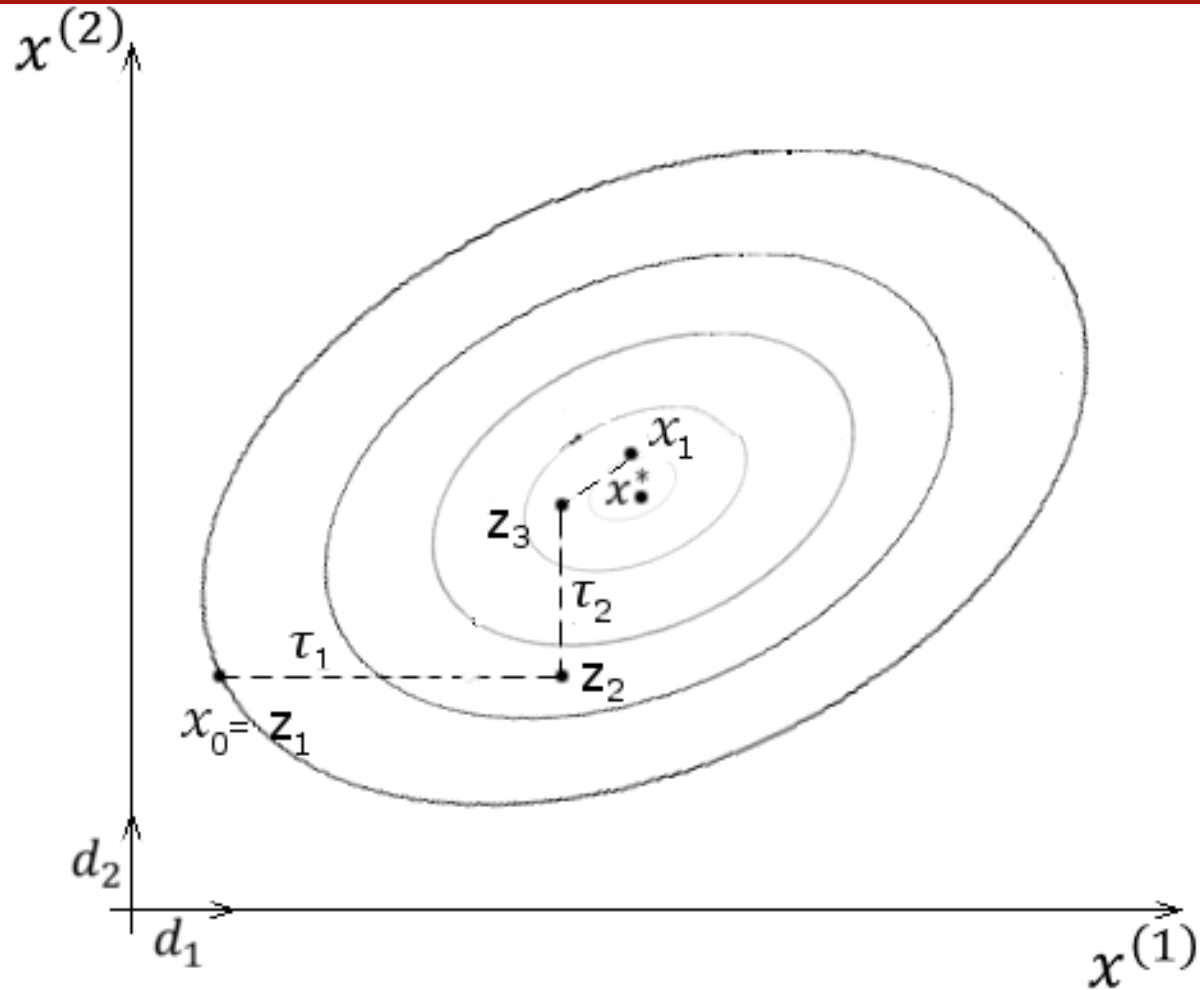
Krok 4:

$$a_s = \begin{cases} d_s & \delta_s = 0 \\ \sum_{j=s}^S \delta_j d_j & \delta_s \neq 0 \end{cases}$$
$$b_s = \begin{cases} a_s & s = 1 \\ a_s - \sum_{j=1}^{s-1} (a_j^T d'_j) d'_j \end{cases}$$

$$d'_s = \frac{b_s}{\|b_s\|} \quad s = 1, 2, \dots, S$$



Metoda Hooka-Jeevesa - z krokiem optymalnym





Metoda Hooka-Jeevesa - z krokiem optymalnym

DANE: $d_1, d_2, \dots, d_S, x_0, \varepsilon$

Krok 0: $z_1 := x_0, n = 0, s = 1$

Krok 1: $z_{s+1} := z_s + \tau_s d_s$

τ_s - min w kierunku d_s

Krok 2: Jeśli $s < S, s = s + 1$ idź do kroku 1

Jeśli $\|z_{s+1} - z_1\| < \varepsilon$ - STOP

Krok 3: $x_{n+1} := z_s + \tau d$

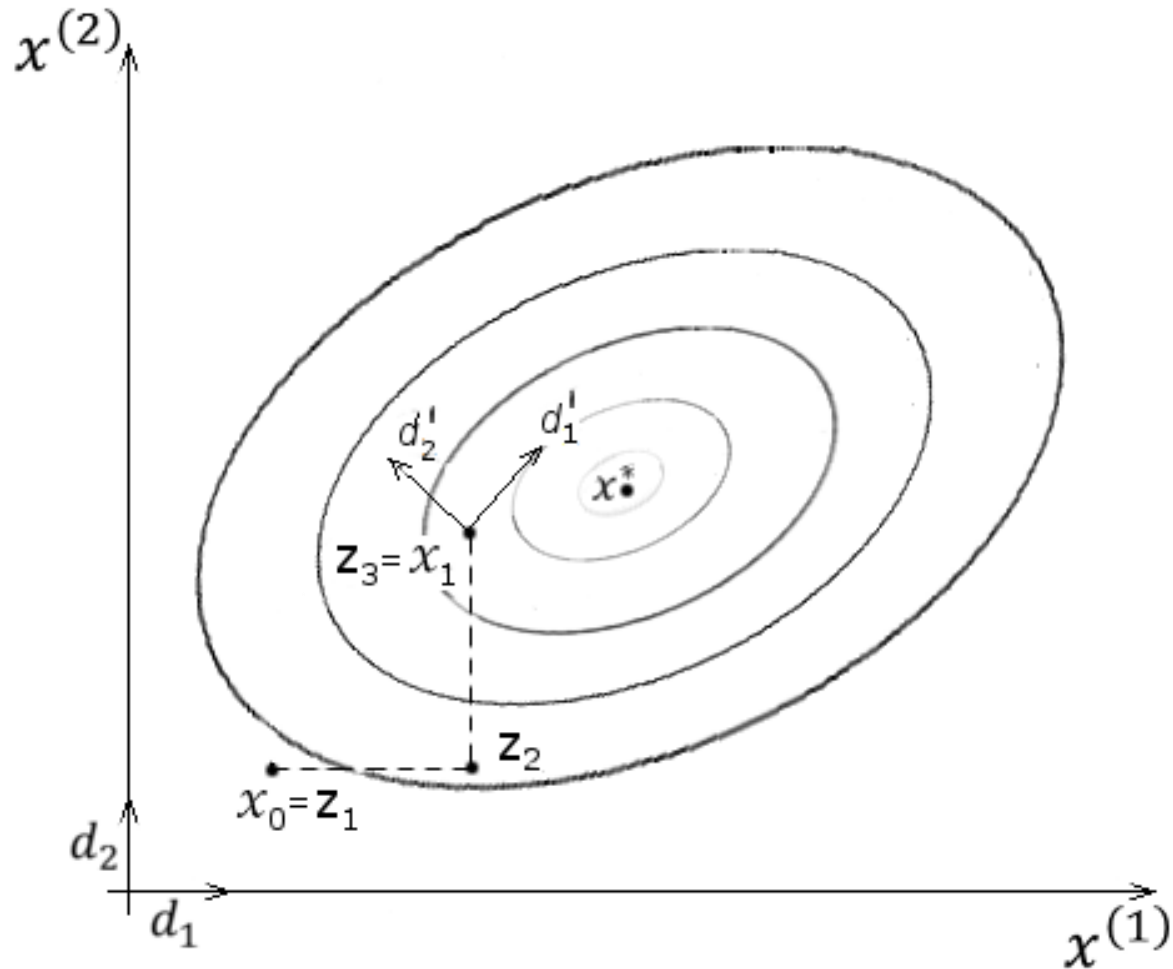
$\tau \rightarrow$ min w kierunku d

$$d = \frac{z_{s+1} - z_1}{\|z_{s+1} - z_1\|} = \frac{\sum_{s=1}^{S+1} \tau_s d_s}{\|\sum_{s=1}^{S+1} \tau_s d_s\|}$$

$n := n + 1, s = 1, z_1 = x_n$



Metoda Rozenbrocka - z krokiem optymalnym





Metoda Rozenbrocka - z krokiem optymalnym

DANE: $d_1, d_2, \dots, d_S, x_0, \varepsilon$

Krok 0: $z_1 := x_0, n = 0, s = 1$

Krok 1: $z_{s+1} := z_s + \tau_s d_s$
 τ_s - min w kierunku d_s

Krok 2: Jeśli $s < S, s := s + 1$ idź do kroku 1

Jeśli $\|z_{s+1} - z_1\| < \varepsilon$ - STOP

Krok 3:
$$a_s = \begin{cases} d_s & \tau_s = 0 \\ \sum_{j=s}^S \tau_j d_j & \tau_s \neq 0 \end{cases}$$
$$b_s = \begin{cases} a_s & s = 1 \\ a_s - \sum_{j=1}^{s-1} (a_j^T d'_j) d'_j \end{cases}$$

$$d'_s = \frac{b_s}{\|b_s\|} \quad s = 1, 2, \dots, S$$

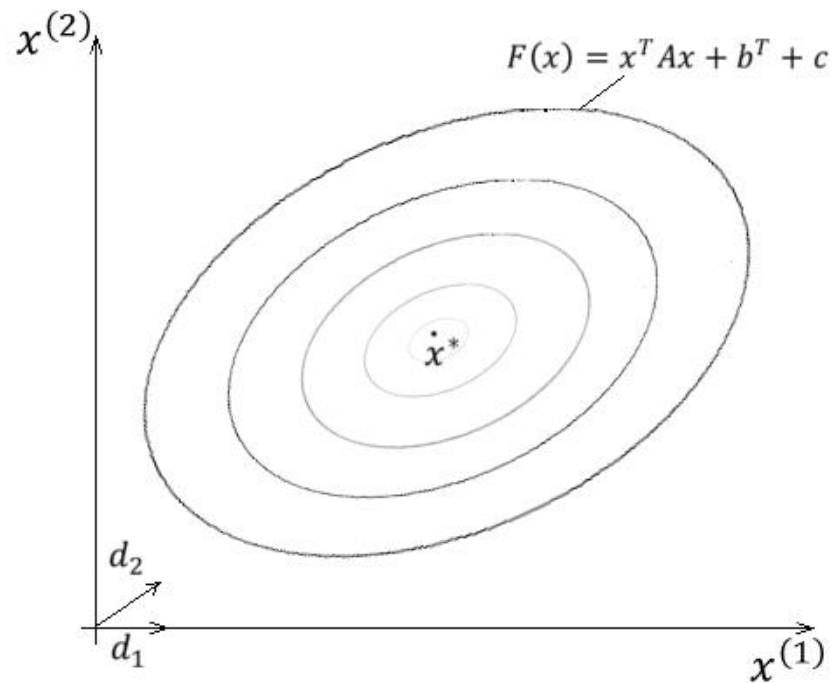
Krok 4: $d_s := d'_s \quad s = 1, 2, \dots, S, n := n + 1, s = 1$ idź do kroku 1



Metoda Powella - wektory sprzężone

d_1, d_2, \dots, d_s - sprzężone według macierzy A , symetrycznej i dodatnio określonej

$$d_i^T A d_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$





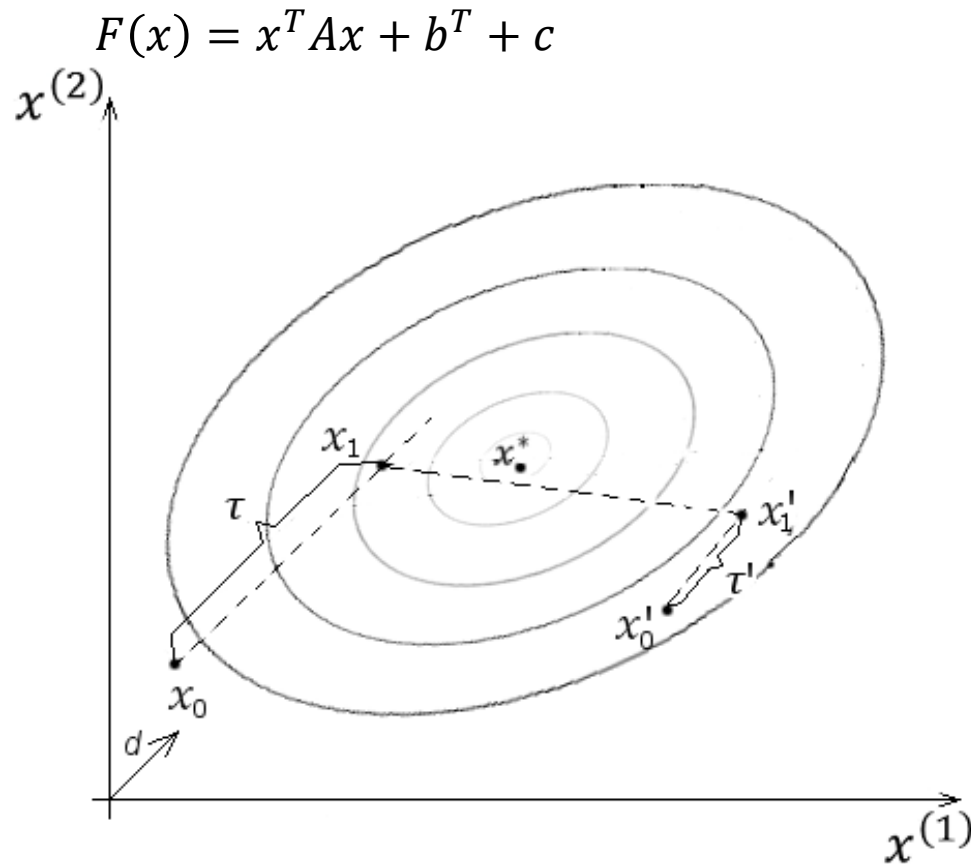
Metoda Powella - wektory sprzężone

$$F(x) = x^T Ax + b^T x + c$$

Dla tak dobranej funkcji, jeżeli zestaw wektorów d_1, d_2, \dots, d_S jest sprzężony według macierzy A , to minimalizując wzdłuż kierunków sprzężonych otrzymamy rozwiązanie w nie więcej niż S krokach.



Metoda Powella



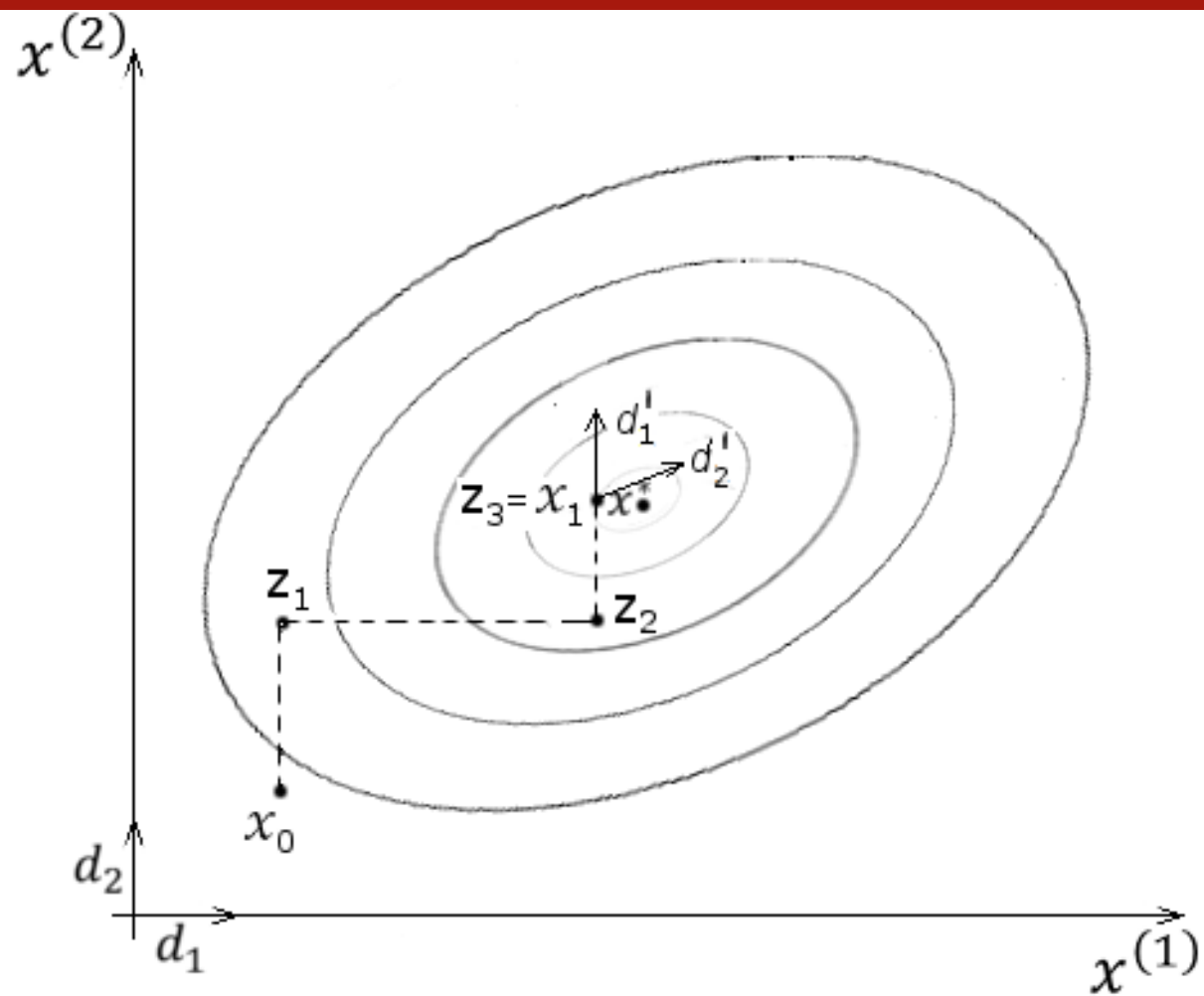
$x_1 = x_0 + \tau^* d$
 τ^* - min w kierunku d z x_0
 $x'_1 = x'_0 + \tau'^* d$
 τ'^* - min w kierunku d z x'_0

$d^T A d' = 0$
 d, d' - sprzężone według A

$$d' = \frac{x'_1 - x_1}{\|x'_1 - x_1\|}$$



Metoda Powella





Metoda Powella

DANE: $d_1, d_2, \dots, d_S, x_0, \varepsilon$

Krok 0: $z_1 := x_0 + \tau_S d_S, n := 0, s := 1$

τ_S - min w kierunku d_S

Krok 1: $z_{s+1} = z_s + \tau_s d_s$

τ_s - min w kierunku d_s

Krok 2: Jeśli $s < S, s := s + 1$ idź do kroku 1

Jeśli $\|z_{s+1} - z_1\| < \varepsilon$ - STOP

Krok 3: $x_{n+1} := z_{s+1}$

$$d := \frac{z_{s+1} - z_1}{\|z_{s+1} - z_1\|}$$

$$z_1 := x_{n+1} + \tau d \quad \tau - \text{min w kierunku } d$$

$$d_s := d_{s+1} \quad s = 1, 2, \dots, S - 1$$

$$d_S := d$$

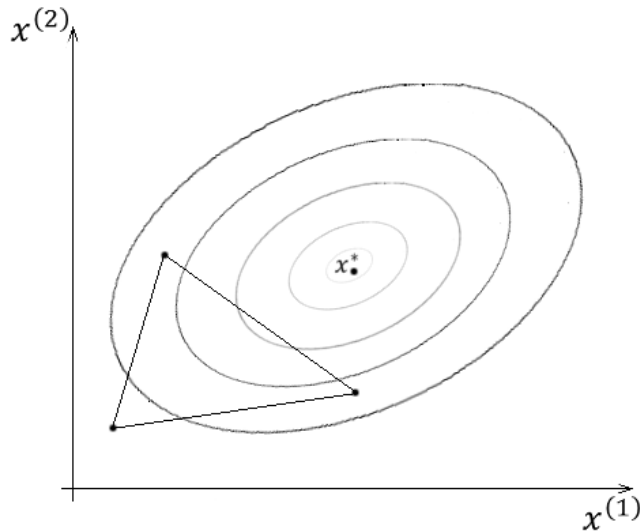
$$\tau_{max} \rightarrow \max_{1 \leq s \leq S} \|z_{s+1} - z_s\| = \max_{1 \leq s \leq S} \tau_s$$

$$d_{max} = d \quad \Delta := \frac{\tau_m \Delta}{\|z_{s+1} - z_1\|} > 0.8$$



Metoda Nelder-Meada (simplex)

$x_1 x_2 \dots x_{S+1}$ - simplex w przestrzeni s -wymiarowej



$$x_H \rightarrow F(x_H) = \max_{1 \leq s \leq S+1} F(x_s)$$

$$x_L \rightarrow F(x_L) = \min_{1 \leq s \leq S+1} F(x_s)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \sum_{s=1, s \neq H}^{S+1} x_s$$

Generowanie simplexu początkowego

$$x_0, c \quad a = \frac{c}{s\sqrt{2}} (\sqrt{S+1} + \sqrt{2} - 1)$$

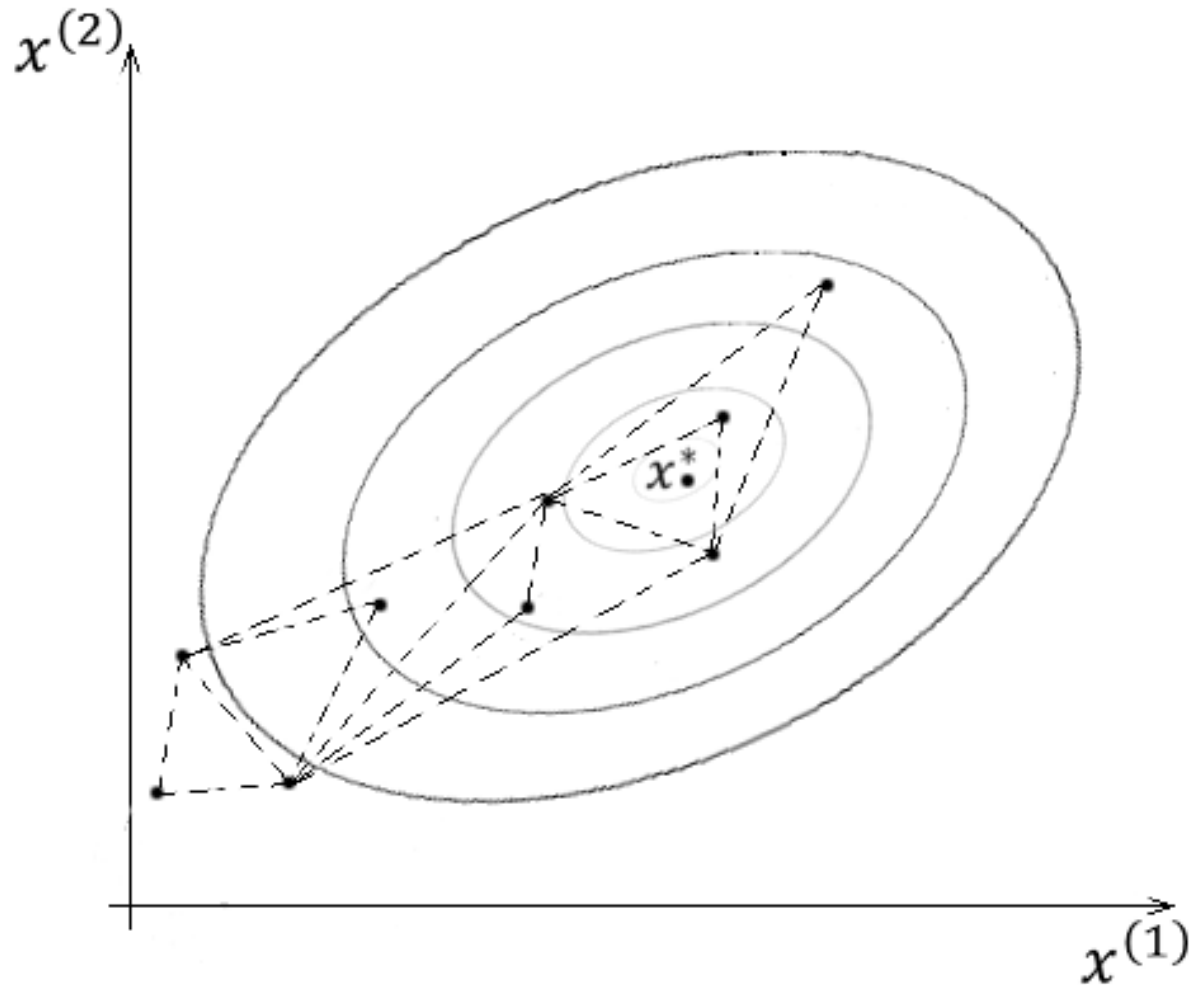
$$b = \frac{c}{s\sqrt{2}} (\sqrt{S+1} - 1)$$

$$d_j = [\quad]$$

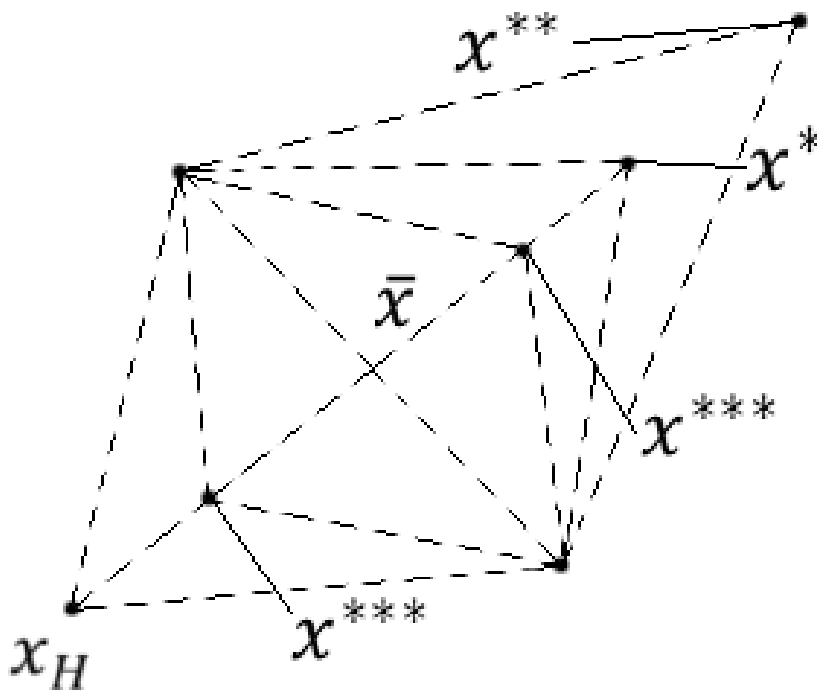
$$x_i = x_0 + d_j, x_{S+1} = x_0$$



Metoda Nelder-Meada (simplex)



Metoda Neldera-Meada



Odbicie

$$x^* = \bar{x} + \alpha(\bar{x} - x_H)$$

α – współczynnik odbicia

Jeśli $\alpha > 0$

$$F(x^*) < F(x_L)$$

Ekspansja

$$x^{**} = \bar{x} + \gamma(x^* - \bar{x}) \quad \gamma > 1$$

γ – współczynnik kontrakcji

Jeśli $F(x^*) > F(x_H)$

$$x^{***} = \bar{x} + \beta(x_H - \bar{x})$$

Jeśli $F(x^*) > \max_{\substack{1 \leq s \leq S+1 \\ s \neq H}} F(x_s)$

$$x^{***} = \bar{x} + \beta(x^* - \bar{x}) \quad \beta \in (0, 1)$$

β – współczynnik kontrakcji



Metoda Nelder-Mead

DANE: x_0, c, ε

Krok 0: $x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{S+1}$ - simplex początkowy, $n = 0$

Krok 1: $x_H \rightarrow F(x_H) = \max_{1 \leq s \leq S+1} F(x_s), x_L \rightarrow F(x_L) = \min_{1 \leq s \leq S+1} F(x_s)$

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq H}}^{S+1} x_s$$

Krok 2: $x^* = \bar{x} + \alpha(\bar{x} - x_H)$

Jeśli $F(x^*) < F(x_L)$ $x^{**} = \bar{x} + \gamma(x^* - \bar{x})$ idź do kroku 3

w przeciwnym razie idź do kroku 4

Krok 3: Jeśli $F(x^{**}) < F(x^*)$ $x_H = x^{**}, n = n + 1$ idź do kroku 1

w przeciwnym razie $x_H = x^*, n = n + 1$ idź do kroku 1

Krok 4: Jeśli $F(x^*) < \max_{\substack{1 \leq s \leq S+1 \\ s \neq H}} F(x_s)$ $x_H = x^*, n = n + 1$

Krok 5: $x' - F(x') = \min\{F(x^*), F(x_H)\}$

$$x^{***} = \bar{x} + \beta(x' - \bar{x})$$

Jeśli $F(x^{***}) > F(x')$ $x_j = x_j + \frac{1}{2}(x_L - x_j), j = 1, 2, \dots, S + 1$ idź do kroku 1

$x_H = x^{***}, n = n + 1$ idź do kroku 1



Dziękuję za uwagę

