Metody Systemowe i Decyzyjne w Informatyce

Wykład 9. Optymalizacja wieloetapowa – programowanie dynamiczne

Optymalizacja wieloetapowa

Optymalizacja wieloetapowa

$$x_1^*, x_2^*, \ldots, x_S^* \to F(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_S^*) = \min_{x_1, x_2, \ldots, x_S \in \mathscr{D}_x} F(x_1, x_2, \ldots, x_S)$$

$$\mathscr{D}_x = (x_1, x_2, \cdots, x_S)$$

$$\Big\{ \left[x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_S \right]^T \in \mathscr{R}^S : \ \varphi_l(x_1, x_2, \cdots, x_S) = 0, l = 1, 2, \ldots, L,$$

$$\psi_m(x_1, x_2, \cdots, x_S) \le 0, m = 1, 2, \ldots, M \Big\}$$

Powyższe zadanie można rozwiązać krok po kroku optymalizując po jednej zmiennej i uzależniając od pozostałych.

Przyjmijmy oznaczenia:

$$F \equiv F_S, \quad \varphi_l \equiv \varphi_{lS}, l = 1, 2, \ldots, L, \quad \psi_m = \psi_{mS}, m = 1, 2, \ldots, M \quad \mathscr{D}_x \equiv \mathscr{D}_{x \ldots}$$

Optymalizacja wieloetapowa

Krok 1.

$$x_S^* = G_S\left(x_1, \ldots, x_{S-1}\right) \rightarrow F_S\left(x_1, x_2, \ldots, x_S^*\right) = \min_{x_S \in \mathscr{D}_{xS}} F_S\left(x_1, x_2, \ldots, x_S\right)$$

Wartość funkcji celu w punkcie optymalnym:

$$F_{S-1}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{S-1}\right) \overset{\Delta}{=} F_S\left(x_1, x_2, \ldots, x_S^*\right) = F_S\left(x_1, x_2, \ldots, G_S\left(x_1, \ldots, x_{S-1}\right)\right)$$

Ograniczenia w punkcie optymalnym:

$$\mathscr{D}_{xS-1}\left(x_1, \ldots, x_{S-1}\right) \overset{\Delta}{=} \mathscr{D}_{xS}\left(x_1, \ldots, x_{S-1}, x_S^* = G_S\left(x_1, \ldots, x_{S-1}\right)\right) =$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_{S-1}\right]^T \in \mathscr{R}^{S-1} : \\ \varphi_{lS}\left(x_1, x_2, \cdots, G_S\left(x_1, \ldots, x_{S-1}\right)\right) = \varphi_{lS-1}\left(x_1, x_2, \cdots, x_{S-1}\right) = 0, \; l = 1, 2, \ldots, L, \\ \psi_{mS}\left(x_1, x_2, \cdots, G_S\left(x_1, \ldots, x_{S-1}\right)\right) = \psi_{mS-1}\left(x_1, x_2, \cdots, x_{S-1}\right) \le 0, \; m = 1, 2, \ldots, M \end{array}\right\}$$

Optymalizacja wieloetapowa

Krok 2.

$$x_{S-1}^{*} = G_{S-1}(x_1,\ldots,x_{S-2}) \to F_{S-1}(x_1, x_2,\ldots,x_{S-1}^{*}) = \min_{x_{S-1}\in\mathscr{D}_{xS-1}} F_{S-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{S-1})$$

Wartość funkcji celu w punkcie optymalnym:

$$F_{S-2}(x_1, x_2,\ldots,x_{S-2}) \overset{\Delta}{=} F_{S-1}(x_1, x_2,\ldots,x_{S-1}^{*}) = F_{S-1}(x_1, x_2,\ldots,G_{S-1}(x_1,\ldots,x_{S-2}))$$

Ograniczenia w punkcie optymalnym:

$$\mathscr{D}_{xS-2}(x_1,\ldots,x_{S-2}) \overset{\Delta}{=} \mathscr{D}_{xS-1}(x_1,\ldots,x_{S-2}, x_{S-1}^{*} = G_{S-1}(x_1,\ldots,x_{S-2})) =$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[x_1\ x_2\ \cdots\ x_{S-2}\right]^T \in \mathscr{R}^{S-2} : \\ \varphi_{lS-1}(x_1, x_2, \cdots, G_{S-1}(x_1,\ldots,x_{S-2})) = \varphi_{lS-2}(x_1, x_2, \cdots, x_{S-2}) = 0,\ l = 1, 2, \ldots, L, \\ \psi_{mS-1}(x_1, x_2, \cdots, G_{S-1}(x_1,\ldots,x_{S-2})) = \psi_{mS-2}(x_1, x_2, \cdots, x_{S-2}) \le 0,\ m = 1, 2, \ldots, M \end{array}\right\}$$

$$\vdots$$

Optymalizacja wieloetapowa

$\vdots$

Krok S-1.

$$x_2^* = G_2(x_1) \to F_2(x_1, x_2^*) = \min_{x_2 \in \mathscr{D}_{x2}} F_2(x_1, x_2)$$

Wartość funkcji celu w punkcie optymalnym:

$$F_1(x_1) \stackrel{\Delta}{=} F_2(x_1\, x_2^*) = F_2(x_1, G_2(x_1))$$

Ograniczenia w punkcie optymalnym:

$$\mathscr{D}_{x1}(x_1) \stackrel{\Delta}{=} \mathscr{D}_{xS-1}(x_1, x_2^* = G_1(x_1)) = \left\{ \begin{array}{l} x_1 \in \mathscr{R} : \\ \varphi_{l2}(x_1, G_1(x_1)) = \varphi_{l1}(x_1) = 0,\ l = 1, 2, \ldots, L, \\ \psi_{m2}(x_1, G_{S-1}(x_1)) = \psi_{m1}(x_1) \le 0,\ m = 1, 2, \ldots, M \end{array} \right\}$$

Optymalizacja wieloetapowa

Krok S.

$$x_1^* \to F_1\left(x_1^*\right) = \min_{x_1 \in \mathcal{D}_{x1}} F_1\left(x_1\right)$$

Teraz możemy powrócić do zależności „*G*” wyznaczonych w poprzednich krokach

$$x_1^*$$

$$x_2^* = G_2\left(x_1^*\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{S-1}^* = G_{S-1}\left(x_1^*, x_2^* \ldots, x_{S-1}^*\right)$$

$$x_S^* = G_S\left(x_1^*, x^*, \ldots, x_{S-1}^*\right)$$

Optymalizacja wieloetapowa

Przykład:

$$F\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = F_2\left(x_1, x_2\right)$$

Krok 1.

$$x_2^* = G_2\left(x_1\right) \to F_2\left(x_1, x_2^*\right) = \min_{x_2}\left\{ x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} F_2\left(x_1, x_2^*\right) = 2x_1 + x_2^* = 0 \Rightarrow x_2^* = -\frac{1}{2} x_1 = G_2\left(x_1\right)$$

$$F_1\left(x_1\right) \stackrel{\Delta}{=} F\left(x_1, x_2^*\right) = F\left(x_1, G_2\left(x_1\right)\right) = \left(x_1\right)^2 + x_1\left(-\frac{1}{2} x_1\right) + \left(-\frac{1}{2} x_1\right)^2$$

$$F_1\left(x_1\right) = \frac{3}{4} x_1^2$$

Optymalizacja wieloetapowa

Krok 2.

$$x_1^* \Longrightarrow F_1(x_1) = \min_{x_1}\left\{\frac{3}{4}x_1^2\right\}$$

$$\frac{d}{dx_1}F_1(x_1) = 2\frac{3}{4}x_1 = 0 \Rightarrow x_1^* = 0$$

Teraz wracamy:

$$x_1^* = 0$$

$$x_2^* = G_2\left(x_1^*\right) = -\frac{1}{2}x_1^* = 0$$

Programowanie dynamiczne

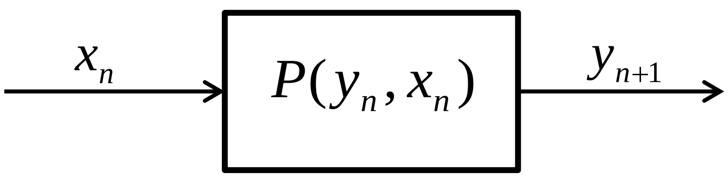
Programowanie dynamiczne

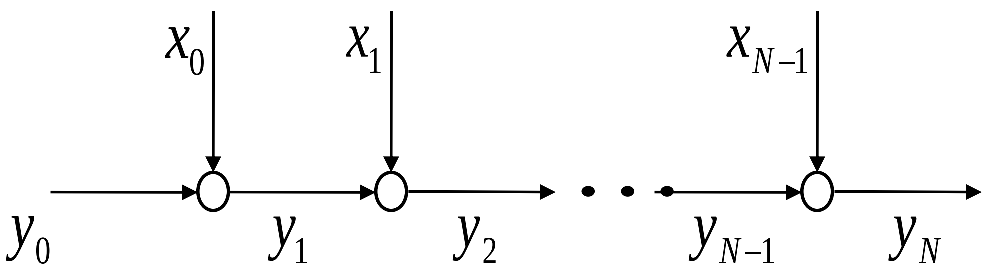
Proces dynamiczny: $y_{n+1} = P(y_n, x_n)$, y_o

n – takt $n = 1, 2, \dots, N$

x_n – decyzja w n – tym takcie

y_n – stan procesu w n – tym takcie





Zadanie decyzyjne: znaleźć ciąg decyzji: $x_0^*, x_1^*, \dots, x_{N-1}^*$,

Po co? Po N krokach zamierzamy coś osiągnąć np.: $y_N = y^*$ - zadany stan,

Przy czym wskaźnik $Q(x_0, \dots, x_{N-1}, y_1, \dots, y_N)$ przyjmuje wartość minimalną.

Programowanie dynamiczne

Określmy przykładowe oceny ciągu decyzji oraz efektów decyzji

$$Q\left(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, y_1, y_2, \ldots, y_N\right)$$

Np.:

$$Q\left(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, y_1, y_2, \ldots, y_N\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n^2, \quad y_N = y^*$$

$$Q\left(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, y_1, y_2, \ldots, y_N\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n^2, \quad \underline{y} \le y_N \le \bar{y}$$

$$Q\left(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, y_1, y_2, \ldots, y_N\right) = \sum_{n=1}^{N-1} \left(y_n - y_n^*\right), \quad 0 \le x_n \le \bar{x}$$

$$Q\left(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, y_1, y_2, \ldots, y_N\right) = \sum_{n=0}^{N-1} A_{n+1}\left(x_n, y_{n+1}\right), \quad \textit{przy ograniczeniach } x_n \textit{ i } y_n$$

Programowanie dynamiczne

Można postąpić w następujący sposób:

$$y_0$$

$$y_1 = P(y_0, x_0)$$

$$y_2 = P(y_1, x_1) = P(P(y_0, x_0), x_1) \stackrel{\Delta}{=} P_1(y_0, x_0, x_1)$$

$$\vdots$$

$$y_N = P(y_{N-1}, x_{N-1}) = P(P(y_{N-2}, x_{N-2}), x_{N-1}) \overset{y_{n+1}=P(y_n, x_n)}{=} \cdots = P_{N-1}(y_0, x_0, x_1, \ldots, x_N)$$

Po podstawieniu do *Q(.)* otrzymujemy:

$$Q(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, y_1, y_2, \ldots, y_N) = \sum_{n=0}^{N-1} A_{n+1}(x_n, y_{n+1}) \stackrel{\Delta}{=} F(y_0, x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$$

Programowanie dynamiczne

Ponieważ:

$$Q(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, y_1, y_2, \ldots, y_N) = \sum_{n=0}^{N-1} A_{n+1}(x_n, y_{n+1}) \overset{\Delta}{=} F(y_0, x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$$

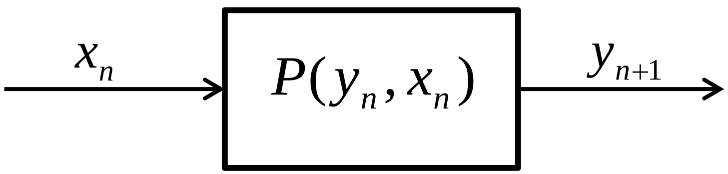
Zadanie optymalizacji:

$$x_0^*, x_1^*, \ldots, x_{N-1}^* \rightarrow Q(x_0^*, x_1^*, \ldots, x_{N-1}^*, y_1, y_2, \ldots, y_N) = \min_{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}} Q(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, y_1, y_2, \ldots, y_N)$$

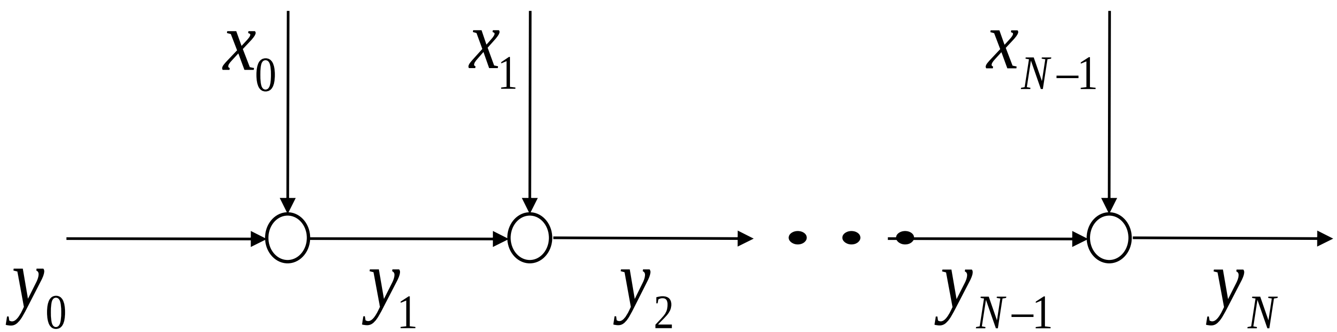
Jest równoważne zadaniu:

$$x_0^*, x_1^*, \ldots, x_{N-1}^* \rightarrow F(y_0, x_0^*, x_1^*, \ldots, x_{N-1}^*) = \min_{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}} F(y_0, x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$$

Do rozwiązania tego zadania można zastosować podejście wieloetapowe.



$$y_{n+1} = P(y_n, x_n),\ y_o$$



$$Q(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, y_1, y_2, \ldots, y_N) = \sum_{n=0}^{N-1} A_{n+1}(x_n, y_{n+1}) \overset{\Delta}{=} F(y_0, x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$$

Programowanie dynamiczne

$$Q(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, y_1, y_2, \dots, y_N) = \sum_{n=0}^{N-1} A_{n+1}(x_n, y_{n+1}) \overset{\Delta}{=} F(y_0, x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$$

Uwaga:

Ostatni stan y_N zależy od decyzji x_{N-1} oraz stanu y_{N-1}, który zależy od poprzednich decyzji $x_0, x_1, \dots, x_{N-2}$.

Poprzedni stan y_{N-1} zależy od decyzji x_{N-2} oraz stanu y_{N-2}, który zależy od poprzednich decyzji $x_0, x_1, \dots, x_{N-3}$.

$\vdots$

Stan y_2 zależy od decyzji x_1 oraz stanu y_1, który zależy od poprzednich decyzji x_0, x_1.

Stan y_1 zależy od decyzji x_0 oraz stanu y_0, który to wartości są znane.

Do rozwiązania zadania optymalizacji powyższej funkcji można zastosować podejście wieloetapowe. Ze względu na specyficzną postać kryterium (suma funkcji decyzji x_n oraz stanu y_{n+1} w kolejnych taktach. Optymalizując kolejno od ostatniego składnika uzależniamy rozwiązanie od poprzedniego stanu i poprzednich decyzji.

Programowanie dynamiczne

$$Q(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, y_1, y_2, \ldots, y_N) = \sum_{n=0}^{N-1} A_{n+1}(x_n, y_{n+1})$$

Krok 1. $x^*_{N-1} \to \min\limits_{x_{N-1}} A_N(x_{N-1}, y_N)$

Wiemy że: $y_N = P(y_{N-1}, x_{N-1})$

$$x^*_{N-1} = G_{N-1}(y_{N-1}) \to \min_{x_{N-1}} A_N(x_{N-1}, P(y_{N-1}, x_{N-1}))$$

$$V_{N-1}(y_{N-1}) \stackrel{\Delta}{=} \min_{x_{N-1}} A_N(x_{N-1}, P(y_{N-1}, x_{N-1})) =$$

$$= A_N(x^*_{N-1}, P(y_{N-1}, x^*_{N-1})) = A_N(G_{N-1}(y_{N-1}), P(y_{N-1}, G_{N-1}(y_{N-1})))$$

Programowanie dynamiczne

Krok 2. $$x^*_{N-2} \rightarrow \min_{x_{N-2}} \left\{ A_{N-1}\left(x_{N-2}, y_{N-1}\right) + V_{N-1}\left(y_{N-1}\right) \right\}$$

Wiemy że: $$y_{N-1} = P\left(y_{N-2}, x_{N-2}\right)$$

$$x^*_{N-2} = G_{N-2}\left(y_{N-2}\right) \rightarrow \min_{x_{N-2}} \left\{ A_{N-1}\left(x_{N-2}, P\left(y_{N-2}, x_{N-2}\right)\right) + V_{N-1}\left(P\left(y_{N-2}, x_{N-2}\right)\right) \right\}$$

$$V_{N-2}\left(y_{N-2}\right) \stackrel{\Delta}{=} \min_{x_{N-2}} \left\{ A_{N-1}\left(x_{N-2}, P\left(y_{N-2}, x_{N-2}\right)\right) + V_{N-1}\left(P\left(y_{N-2}, x_{N-2}\right)\right) \right\} =$$

$$= \left\{ A_{N-1}\left(x^*_{N-2}, P\left(y_{N-2}, x^*_{N-2}\right)\right) + V_{N-1}\left(P\left(y_{N-2}, x^*_{N-2}\right)\right) \right\} =$$

$$= A_{N-1}\left(G_{N-2}\left(y_{N-2}\right), P\left(y_{N-2}, G_{N-2}\left(y_{N-2}\right)\right)\right) + V_{N-1}\left(P\left(y_{N-2}, G_{N-2}\left(y_{N-2}\right)\right)\right)$$

$$\vdots$$

Programowanie dynamiczne

Krok N-1. $$x_1^* \to \min_{x_1}\left\{A_2\left(x_1, y_2\right)+V_2\left(y_2\right)\right\}$$

Wiemy że: $$y_2 = P\left(y_1, x_1\right)$$

$$x_1^* = G_1\left(y_1\right) \to \min_{x_1}\left\{A_2\left(x_1, P\left(y_1, x_1\right)\right)+V_2\left(P\left(y_1, x_1\right)\right)\right\}$$

$$V_1\left(y_1\right) \overset{\Delta}{=} \min_{x_1}\left\{A_2\left(x_1, P\left(y_1, x_1\right)\right)+V_2\left(P\left(y_1, x_1\right)\right)\right\} =$$
$$= A_2\left(x_1^*, P\left(y_1, x_1^*\right)\right)+V_2\left(P\left(y_1, x_1^*\right)\right)$$
$$= A_2\left(G_1\left(y_1\right), P\left(y_1, G_1\left(y_1\right)\right)\right)+V_2\left(P\left(y_1, G_1\left(y_1\right)\right)\right)$$

Programowanie dynamiczne

Krok N. $$x_0^* \to \min_{x_0}\{A_1(x_0, y_1) + V_1(y_1)\}$$

Wiemy że: $$y_1 = P(y_0, x_0)$$

$$x_0^* = G_0(y_0) \to \min_{x_0}\{A_1(x_0, P(y_0, x_0)) + V_1(P(y_0, x_0))\}$$

y_0 jest znaną wartością i teraz możemy wyliczyć kolejne wartości decyzji $x_0^*, x_1^*, \ldots, x_{N-1}^*$,

$$x_0^* = G_0(y_0) \to y_1 = P(y_0, x_0^*)$$

$$x_1^* = G_1(y_1) \to y_2 = P(y_2, x_2^*)$$

$$\vdots$$

$$x_{N-2}^* = G_{N-2}(y_{N-2}) \to y_{N-1} = P(y_{N-2}, x_{N-2}^*)$$

$$x_{N-1}^* = G_{N-1}(y_{N-1}) \to y_N = P(y_{N-1}, x_{N-1}^*)$$

Programowanie dynamiczne

Przykład: $y_{n+1} = P(y_n, x_n) = 2y_n + x_n, \quad y_o = 0$

$$Q(x_0, x_1, y_1, y_2) = \sum_{n=0}^{1} A_{n+1}(x_n, y_{n+1}) = \sum_{n=0}^{1} \left(x_n^2 + (y_{n+1} - 5)^2 \right) =$$

$$= \left(x_0^2 + (y_1 - 5)^2 \right) + \left(x_1^2 + (y_2 - 5)^2 \right)$$

Krok 1.

$$x_1^* \to \min_{x_1} \left(x_1^2 + (y_2 - 5)^2 \right)$$

$$y_2 = 2y_1 + x_1$$

$$x_1^* = G_1(y_1) \to \min_{x_1} \left(x_1^2 + (2y_1 + x_1 - 5)^2 \right)$$

$$2x_1^* + 2\left(2y_1 + x_1^* - 5\right) = 0 \Rightarrow x_1^* = G_1(y_1) = \frac{5}{2} - y_1$$

$$V_1(y_1) = \left(\frac{5}{2} - y_1 \right)^2 + \left(2y_1 + \frac{5}{2} - y_1 - 5 \right)^2 = 2\left(y_1 - \frac{5}{2} \right)^2$$

Programowanie dynamiczne

Krok 2: $x_0^* \to \min\limits_{x_0}\left\{\left(x_0^2+\left(y_1-5\right)^2\right)+2\left(y_1-\frac{5}{2}\right)^2\right\}$

$$y_1 = 2y_0 + x_0$$

$$x_0^* = G_0\left(y_0\right) \to \min_{x_0}\left\{\left(x_0^2+\left(2y_0+x_0-5\right)^2\right)+2\left(2y_0+x_0-\frac{5}{2}\right)^2\right\}$$

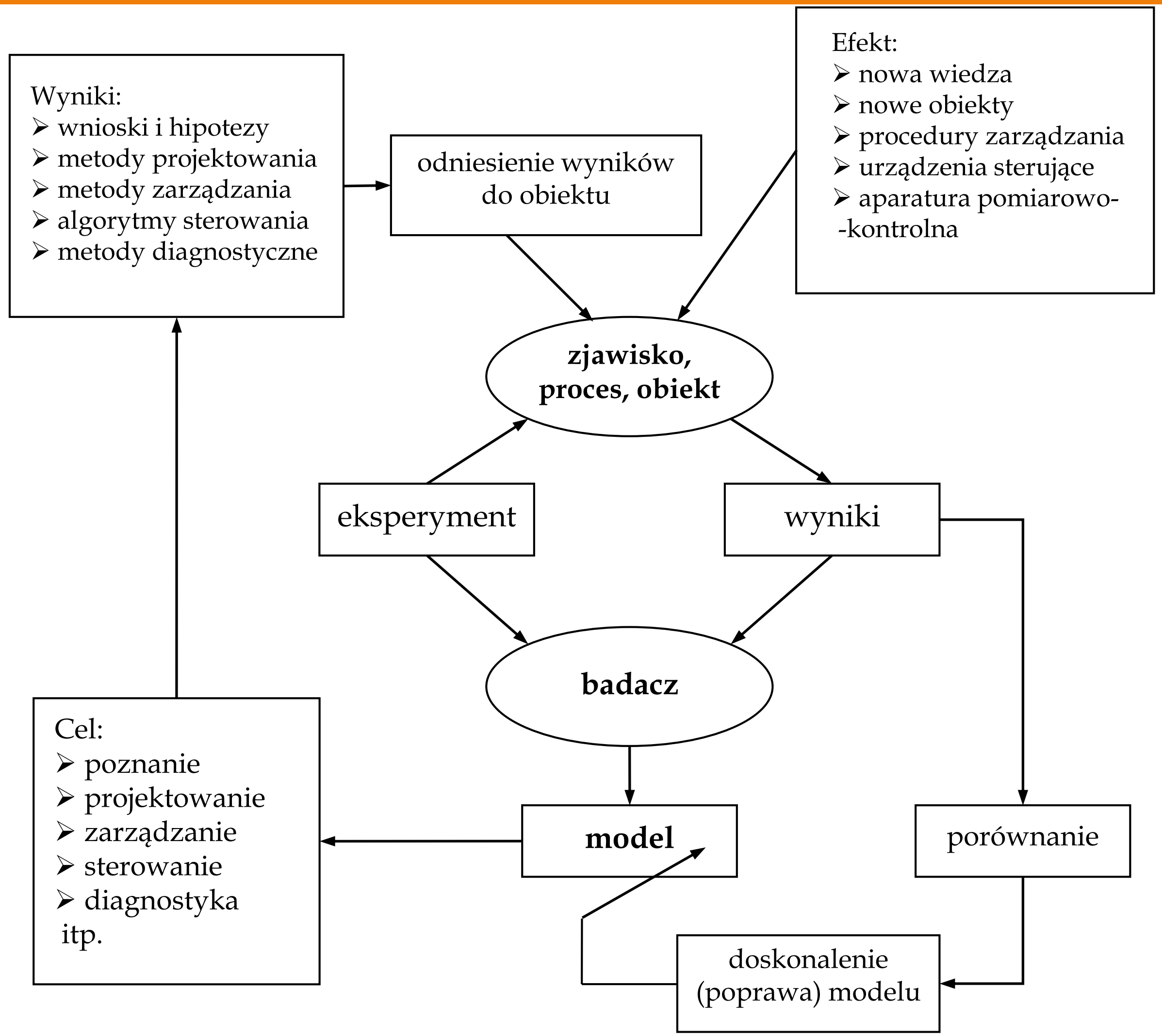
$$2x_0^* + 2\left(2y_0+x_0^*-5\right)+4\left(2y_0+x_0-\frac{5}{2}\right)=0 \Rightarrow x_0^* = G_0\left(y_0\right)=\frac{15}{8}-\frac{3}{2}y_0=\frac{15}{8}$$

Teraz wracamy:

$$x_0^* = \frac{15}{8} \to y_1 = 2\times 0+\frac{15}{8}=\frac{15}{8}$$

$$x_1^* = \frac{5}{2}-\frac{15}{8}=\frac{5}{8} \to y_1 = 2\times 0+\frac{5}{8}=\frac{5}{8}$$

Model w badaniach systemowych



Dziękuję za uwagę