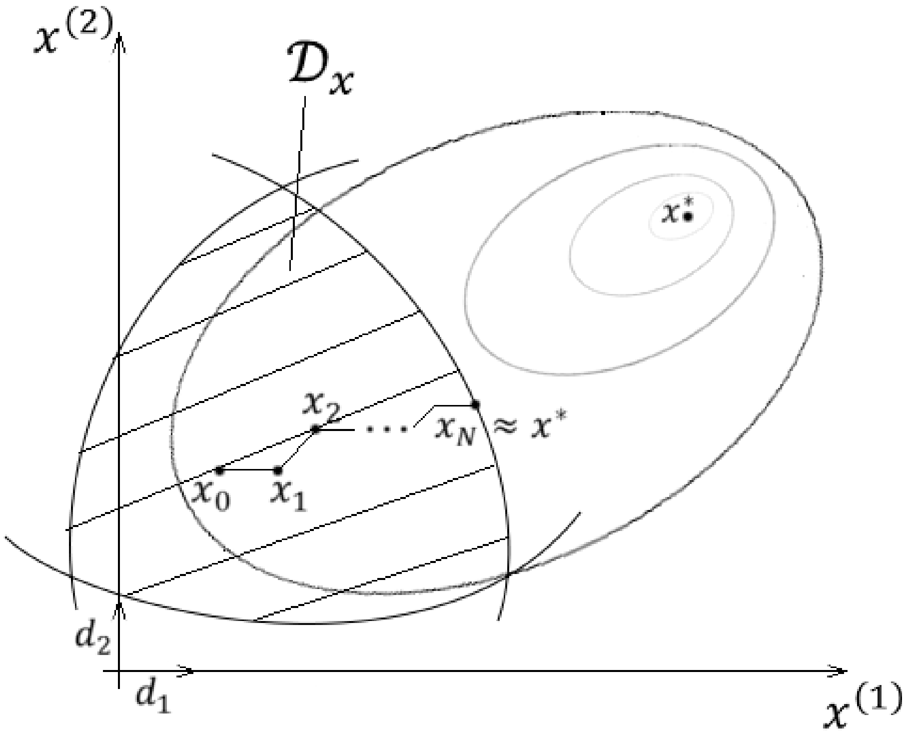
Politechnika Wrocławska

Metody optymalizacji z ograniczeniami

informacje dodatkowe

Numeryczne metody optymalizacji z ograniczeniami

$$x^* \to F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$



1. Metoda transformacji zmiennych
2. Metody funkcji kary
   - kara zewnętrzna (kara)
   - kara wewnętrzna (bariera)
3. Metody poprawy kierunków
4. Inne

Metoda transformacji zmiennych

$$
\begin{tikzcd}
x^* \arrow[r] & \min\limits_{x \in D_x} F(x) \arrow[d] \\
z^* \arrow[u] & \min\limits_{z \in R^s} \bar{F}(z) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

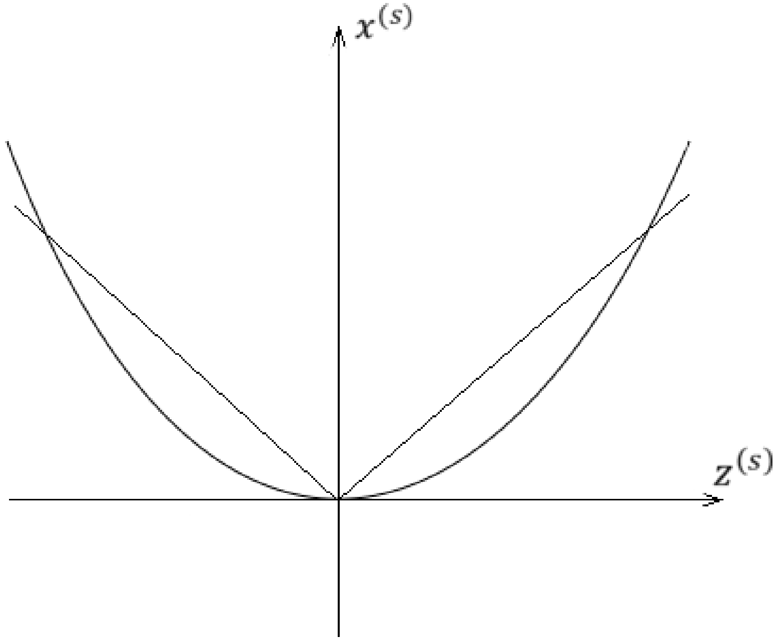
$$
\begin{gathered}
p: R^s \to \mathcal{D}_x \\
x = p(z) \\
\bar{F}(z) = F\big(p(z)\big) \\
z \in R^s \to x \in \mathcal{D}_x
\end{gathered}
$$

Przykład

$$D_x = \{x \in R^s, \quad x^{(s)} \geq 0, \quad s = 1, 2, \dots, S\}$$

$$x^{(s)} = \left(z^{(s)}\right)^2 \text{ lub } x^{(s)} = \left|x^{(s)}\right|$$

$$z^{(s)} \in R^s \to x^{(s)} \in [0, \infty)$$

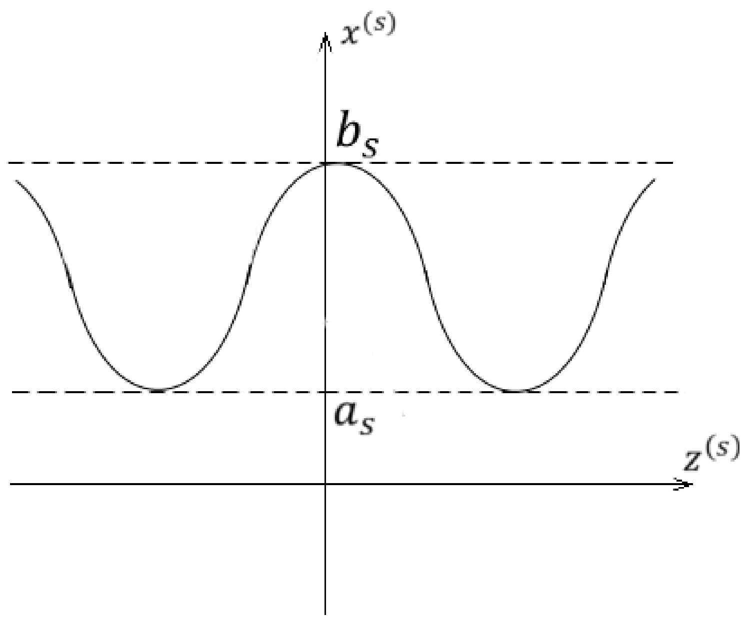


Przykład

$$\mathcal{D}_x = \{x \in R^s, \qquad a_s \leq x^{(s)} \leq b_s, \qquad s = 1, 2, \dots, S\}$$

$$x^{(s)} = a_s + (b_s - a_s)\sin^2 z^{(s)}$$

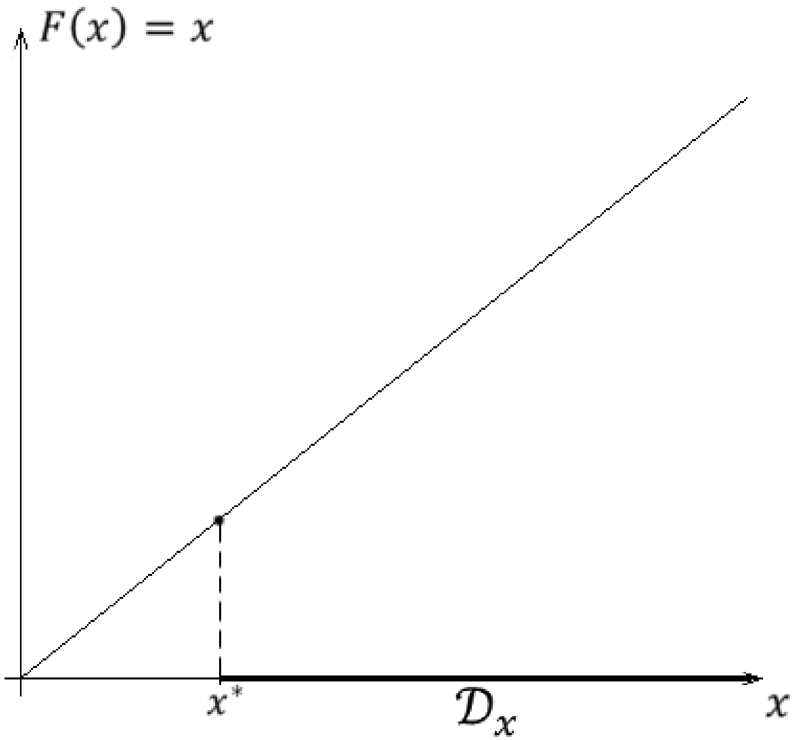
$$z^{(s)} \in R^1 \to x^{(2)} \in [a_s, b_s]$$



Przykład

$F(x) = x$

$\mathcal{D}_x = \{x \in R^1 \;\; x \geq 1\}$



$$x^* \to \min_{x \geq 1} x$$

$$x = z^2 + 1 = p(z)$$

$$z \in R \to x \in [1, \infty)$$

$$\bar{F}(z) = z^2{+}1$$

$$z^* \to \min_{z \epsilon R} \bar{F}(z)$$

$$z^* \to \min_{z \epsilon R}(z^2{+}1)$$

$$(z^2 + 1)' = 2z = 0$$

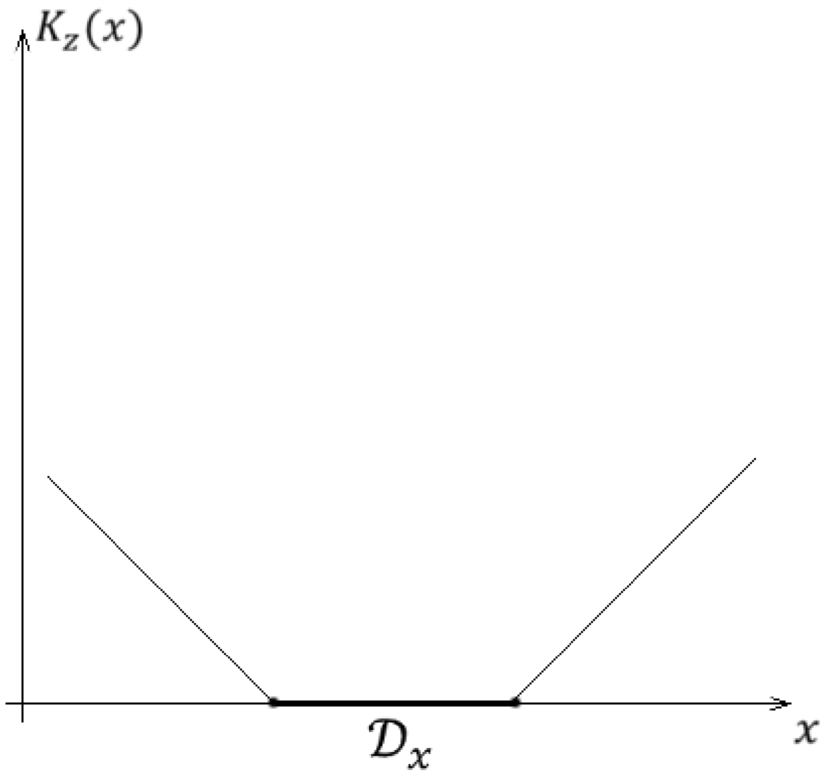
$$z^* = 0$$

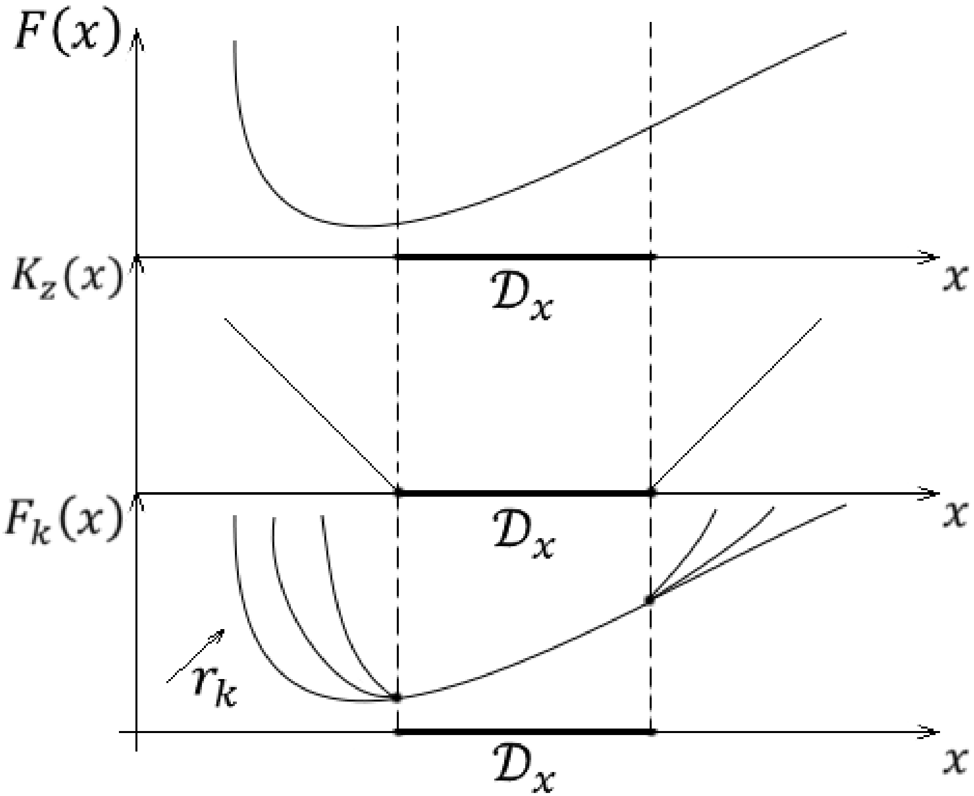
$$x^* = p(z^*) = (z^*)^2 + 1 = 1$$

Metody funkcji kary
Kary zewnętrzne (kary)

$$F_k(x) = F(x) + r_k K_z(x)$$

$$K_z(x) \begin{cases} = 0 & x \in \mathcal{D}_x \\ > 0 & x \notin \mathcal{D}_x \end{cases}$$





$r_k > 0$

$$\lim_{k\to\infty} r_k = \infty$$

Przykłady funkcji kary zewnętrznej

$$\mathcal{D}_x = \{x \in R^S,\ \varphi_l(x) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad \psi_m(x) \le 0, \quad m = 1, 2, \dots, M\}$$

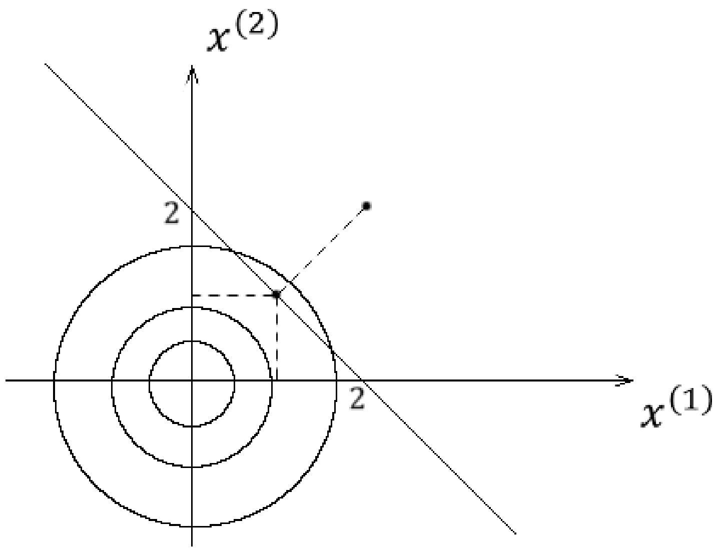
$$\varphi_l(x) \to K_{lz}(x) = \left(\varphi_l(x)\right)^2, l = 1, 2, \dots, L$$

$$\psi_m(x) \to K_{mz}(x) = (\max\{0, \psi_m(x)\})^2, m = 1, 2, \dots, M$$

$$K_z(x) = \sum_{l=1}^{L} r_l\left(\varphi_l(x)\right)^2 + \sum_{m=1}^{M} \rho_m \ \max\{0, \varphi_m(x)\}$$

Przykład

$$F(x) = \left(x^{(1)}\right)^2 + \left(x^{(2)}\right)^2$$
$$\mathcal{D}_x = \{x \in R^2, x^{(1)} + x^{(2)} - 2 = 0\}$$



$$F_k(x) = \left(x^{(1)}\right)^2 + \left(x^{(2)}\right)^2 + r_k\left(x^{(1)} + x^{(2)} - 2\right)^2$$

$$F_k'(x) = 0$$

$$2x^{(1)} + 2r_k\left(x^{(1)} + x^{(2)} - 2\right) = 0$$

$$2x^{(2)} + 2r_k\left(x^{(1)} + x^{(2)} - 2\right) = 0$$

$$x^{(1)} = x^{(2)}$$

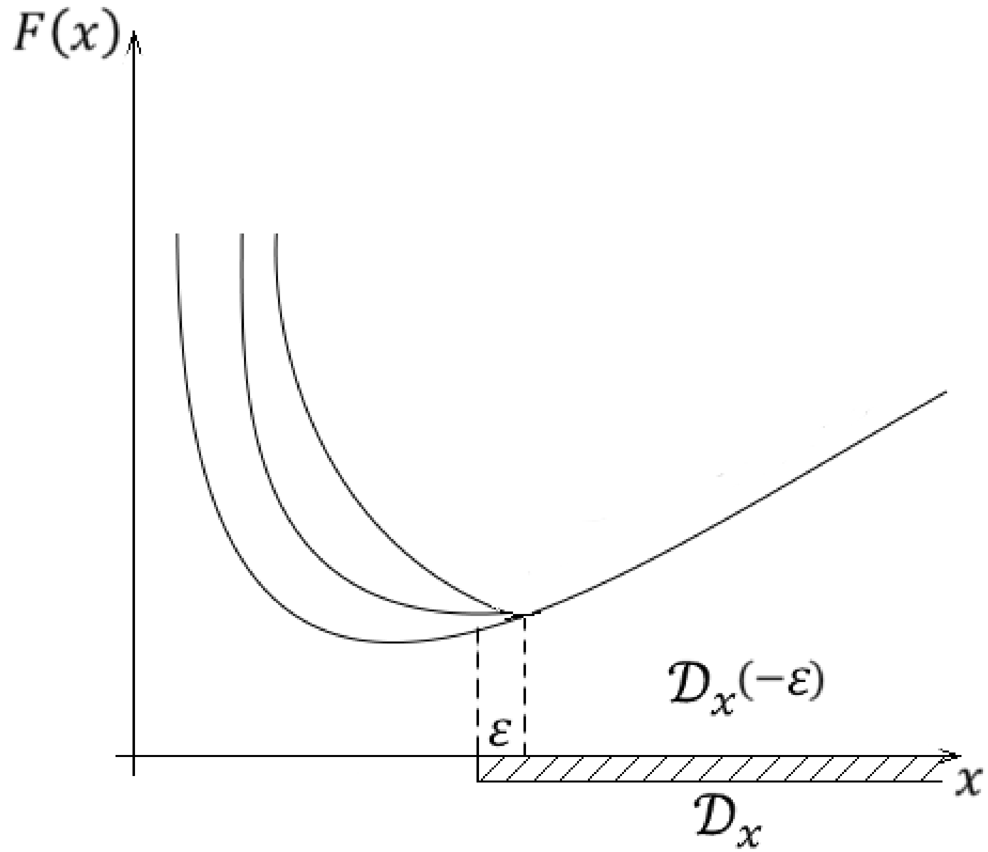
$$+2r_k\left(x^{(1)} + x^{(2)} - 2\right) = 0$$

$$x^{(1)} = x^{(2)} = \frac{2r_k}{2r_k + 1}$$

$$x^{(1)} = x^{(2)} = \lim_{r_k \to \infty} \frac{2r_k}{2r_k + 1} = 1, \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Politechnika Wrocławska

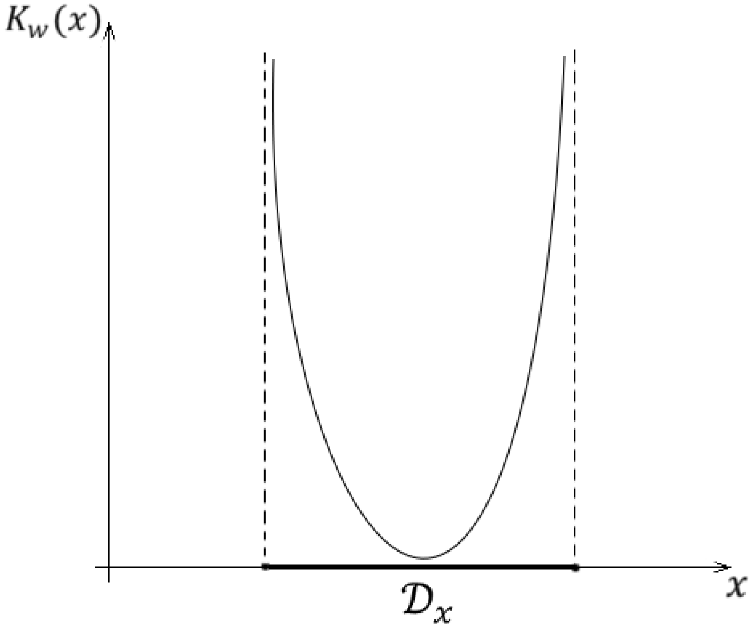
Modyfikacje



Zaczynamy coraz wcześniej

Kary wewnętrzne (bariery)

$F_k(x) = F(x) + r_k K_w(x)$



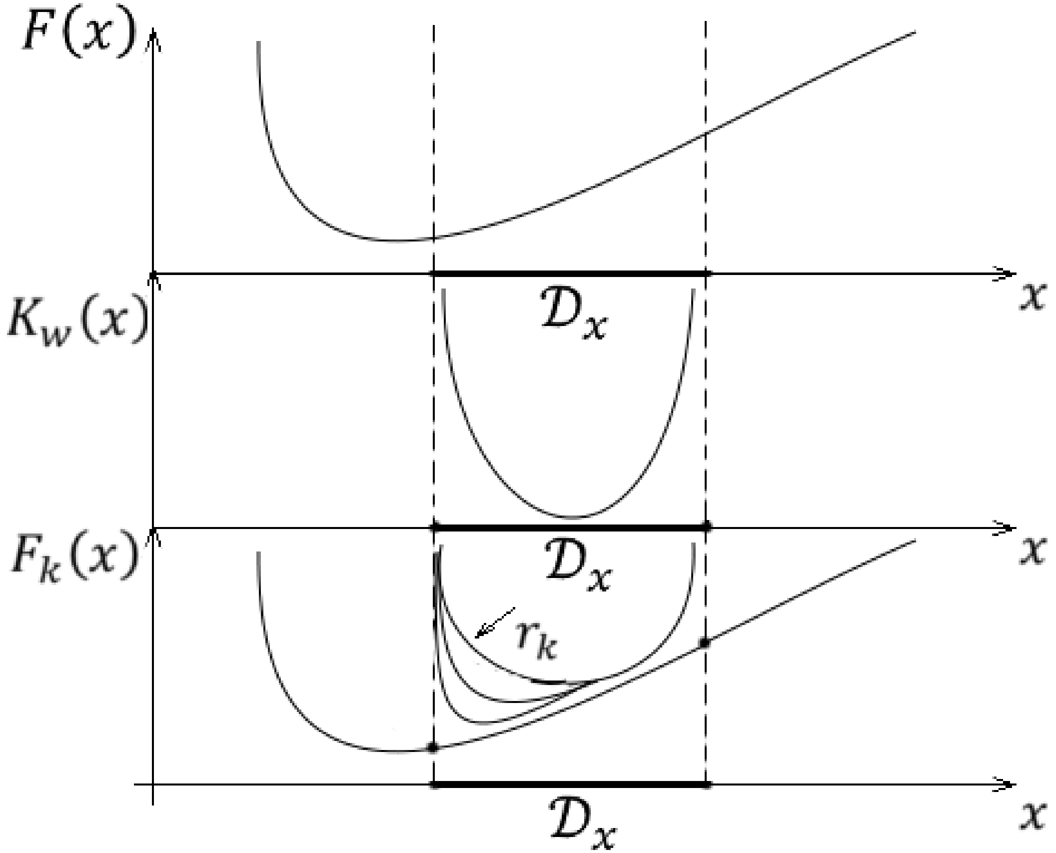
$K_w(x)$ – taka funkcja, że

$\exists\ x_1, x_{,2}, \dots, x_n \in \mathcal{D}_x \qquad \lim_{k\to\infty} x_k = x \in \mathcal{D}_x$

$\exists_k \quad K_w(x_k + 1) > K_w(x_k)$

Politechnika Wrocławska

Kary wewnętrzne (bariery)



$r_k > 0 \qquad \lim_{k\to\infty} r_k = 0$

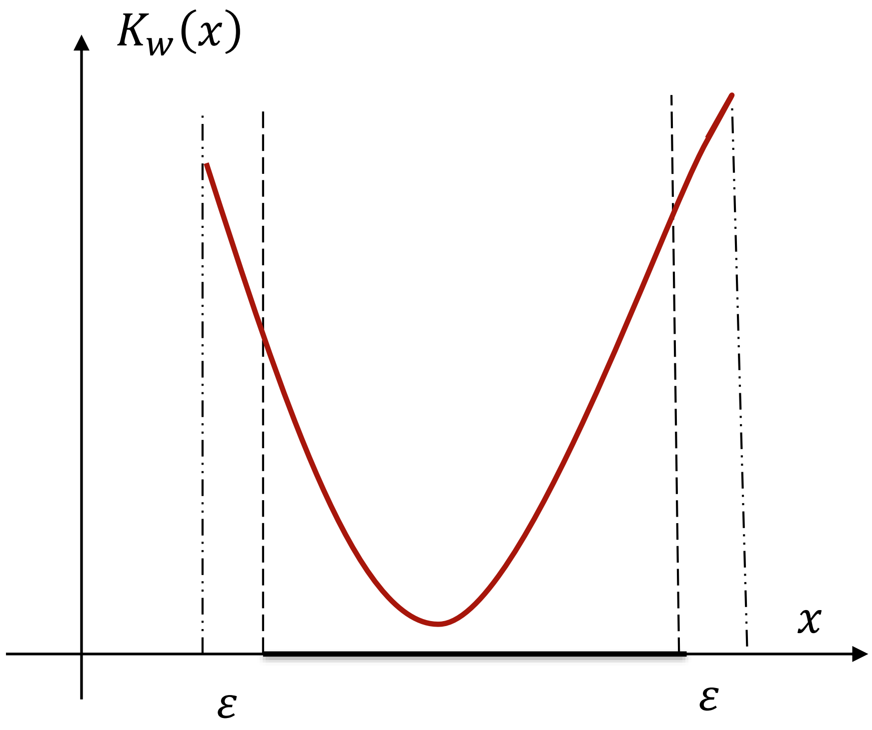
Kara wewnętrzna (metoda Carrola)

$$\mathcal{D}_x = \{x \in R^s, \qquad \psi_m(x) \le 0, \qquad m = 1, 2, \dots, M\}$$

$$K_w(x) = \sum_{m=1}^{M} \frac{-r_m}{\psi_m(x)}, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Politechnika Wrocławska

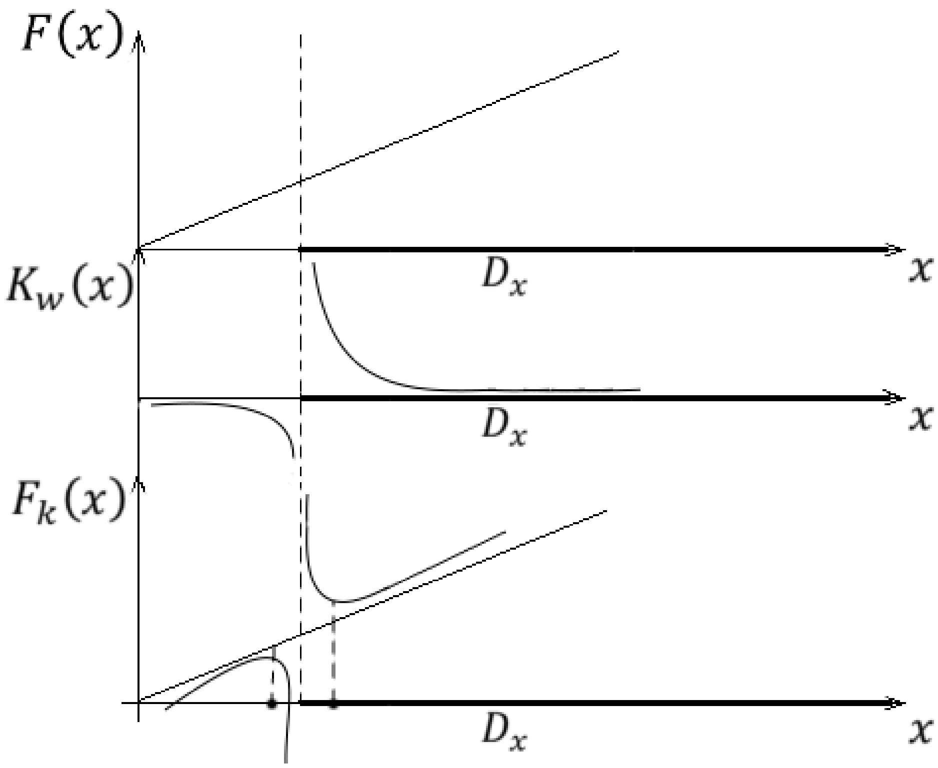
Modyfikacje



Politechnika Wrocławska

Przykład

$$F(x) = x;\ \ \mathcal{D}_x = \{x \in R^1, x \geq 1\} \equiv \{x \in R^1, 1 - x \leq 0\}$$



$$K_w(x) = \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1}$$

$$F_k(x) = x + r_k \frac{1}{x-1}$$

$$F'(x) = 1 + \frac{-r_k}{(x-1)^2} = 0$$

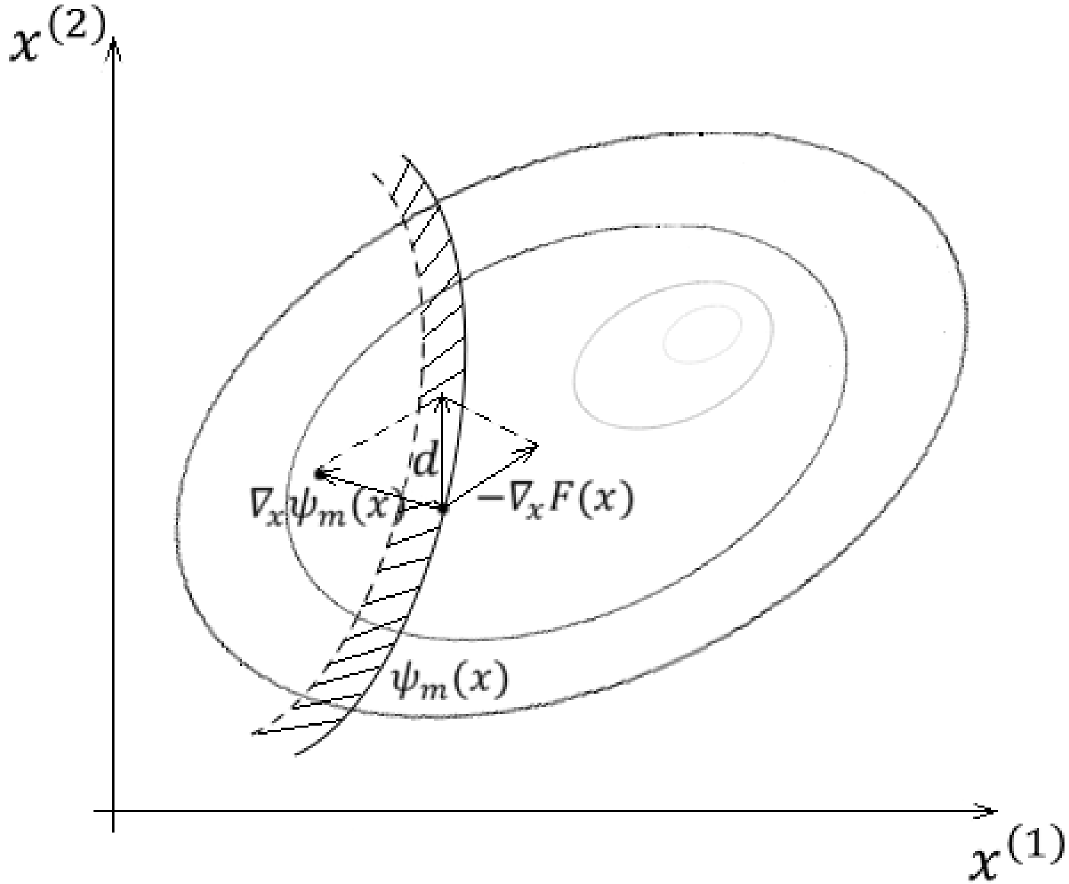
$$x_k = 1 \pm \sqrt{r_k}$$

$$x_k = 1 - \sqrt{r_k} \notin \mathcal{D}_x$$

$$x_k = 1 + \sqrt{r_k} \in \mathcal{D}_x$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

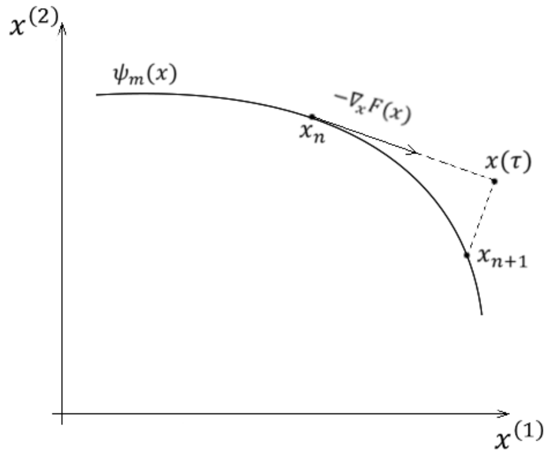
Metoda modyfikacji kierunków

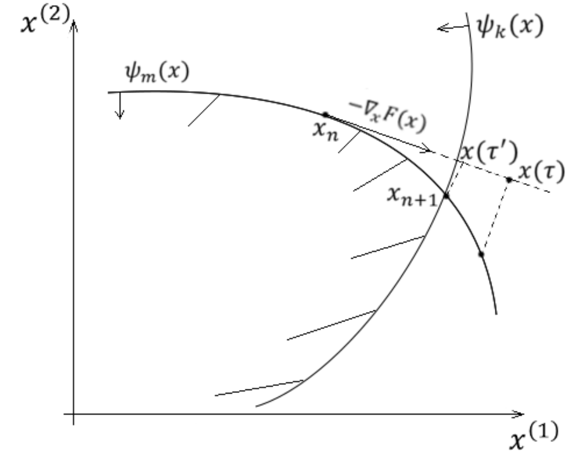


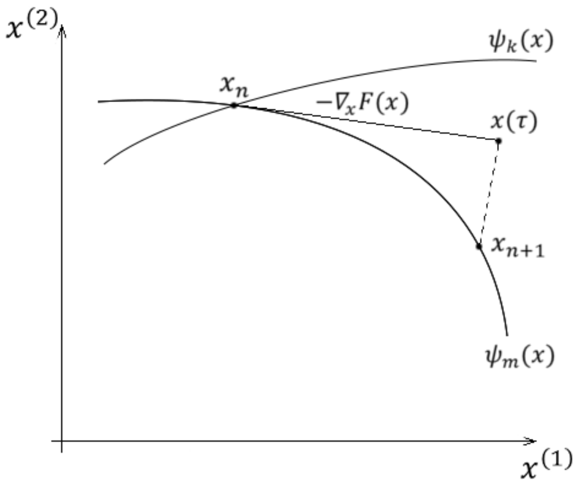
$$d = \frac{\nabla_x \psi_m(x)}{\|\nabla_x \psi_m(x)\|} - \frac{\nabla_x F(x)}{\|\nabla_x F(x)\|}$$

$$x\colon \psi(x) - \delta \leq 0$$

Metoda rzutowania - Rozena

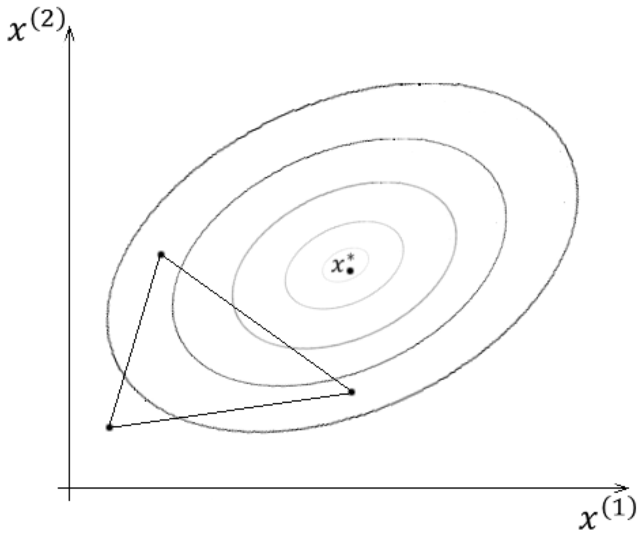






Metoda Compleks (Boxa)
Metoda Neldera-Meada (simplex)

$x_1\ x_2\ \dots x_K$ - kompleks w przestrzeni s-wymiarowej $K \geq S+1$



$$x_H \rightarrow F(x_H) = \max_{1 \leq s \leq K} F(x_s)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{s} \sum_{s=1, s \neq H}^{K} x_s$$

$$x^* = (1+\alpha)\bar{x} - x_H$$

$$D_x\colon\ l_s \leq x^{(s)} \leq u_s \ \ s = 1, 2, \dots, S$$
$$l_m \leq x_m(x) \leq u_m \ \ m = 1, 2, \dots, M$$

$x_k = l_k + r_k|u_k - l_k|, r_k$ $-$ *liczba lozowa* $\in [0,1], k = 1, 2, \dots, K$

Jeśli x_k ne należy do D_x to przesuń punkt w kierunku centroidu punktów zaakceptowanych

Metoda Complex

DANE: $x_0, c, \varepsilon, \mathrm{K}, \alpha\ zalecane\ K = 2S, \alpha = 1.3$

Krok 0: $x_1\ x_2$ ... $x_K \in D_x$ - complex początkowy, $n = 0$

Krok 1: Wyznacz promień minimalnej kuli zawierającej komplex ρ_{min}

Krok 2: Sprawdź czy $\rho_{min} < \varepsilon$ jeśli tak to stop, w przeciwnym przypadku krok 3

Krok 3: $x_H \to F(x_H) = \max_{1 \le s \le S+1} F(x_s)$,

$\bar{x} = \frac{1}{S} \sum_{\substack{s=1 \\ s \ne H}}^{K} x_s$ sprawdź czy $\bar{x} \in D_x$ jeśli nie to dodaj punkt do compleksu

Krok 4: $x^* = (1 + \alpha)\bar{x} + \alpha x_H$

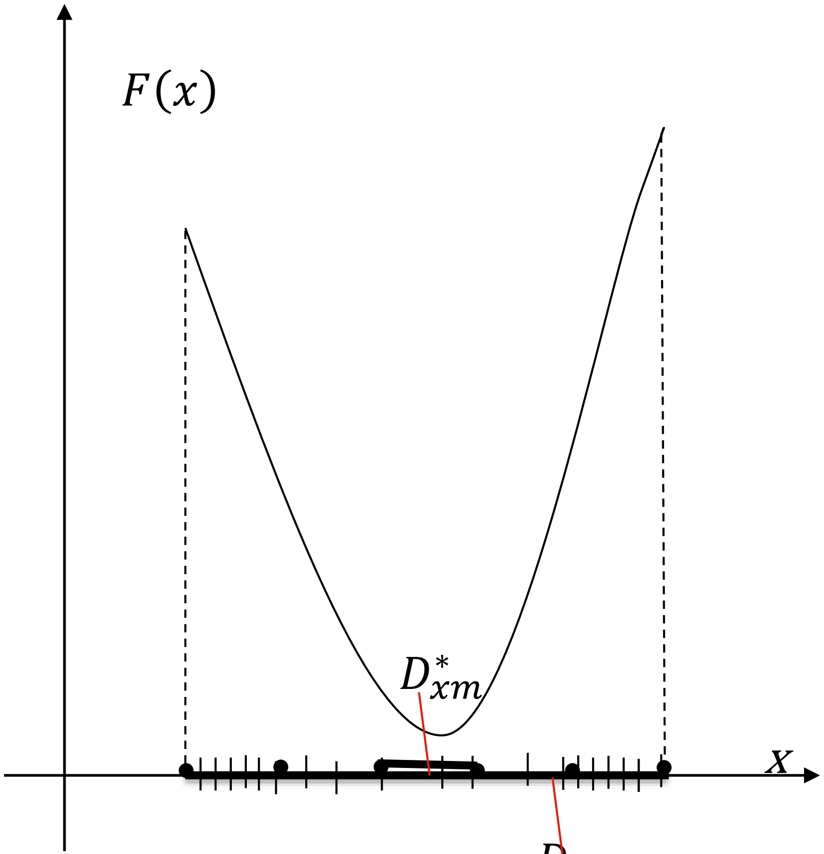
Krok 5: Zbadaj czy $x^* \in D_x$ jeśli tak to przejdź do kroku 7, w przeciwnym razie

Krok 6: $x^* = \bar{x} - (\bar{x} - x^*)/2$ aż $x^* \in D_x$

Krok 7: Jeśli $F(x^*) < F(x_H)$ idź do kroku 2

w przeciwnym razie idź do kroku 6

Poszukiwania losowe



$$f(x) = \frac{F(x)}{\int_{D_x} F(x)dx}$$

Poszukiwania losowe

Dane: $F(x), D_x, \varepsilon, N, M$

Krok 1: Generujemy N punktów w zbiorze D_x wg rozkładu

$$f(x) = \frac{F(x)}{\int\limits_{D_x} F(x)dx}$$

Krok 2: Dzielimy zbiór D_x na M równolicznych rozłącznych podzbiorów

$$D_x = \dot{\bigcup_{m=1}^{M}} D_{xm}, \quad \|D_{xm}\| = \frac{1}{M}\|D_x\|$$

Krok 3. Liczymy punkty, które wpadną do poszczególnych zbiorów

$$N_m - liczba\ wygenerowanych\ punktów\ w\ zbiorze\ D_{xm}$$

Krok 4. Do dalszego podziału wybieramy taki

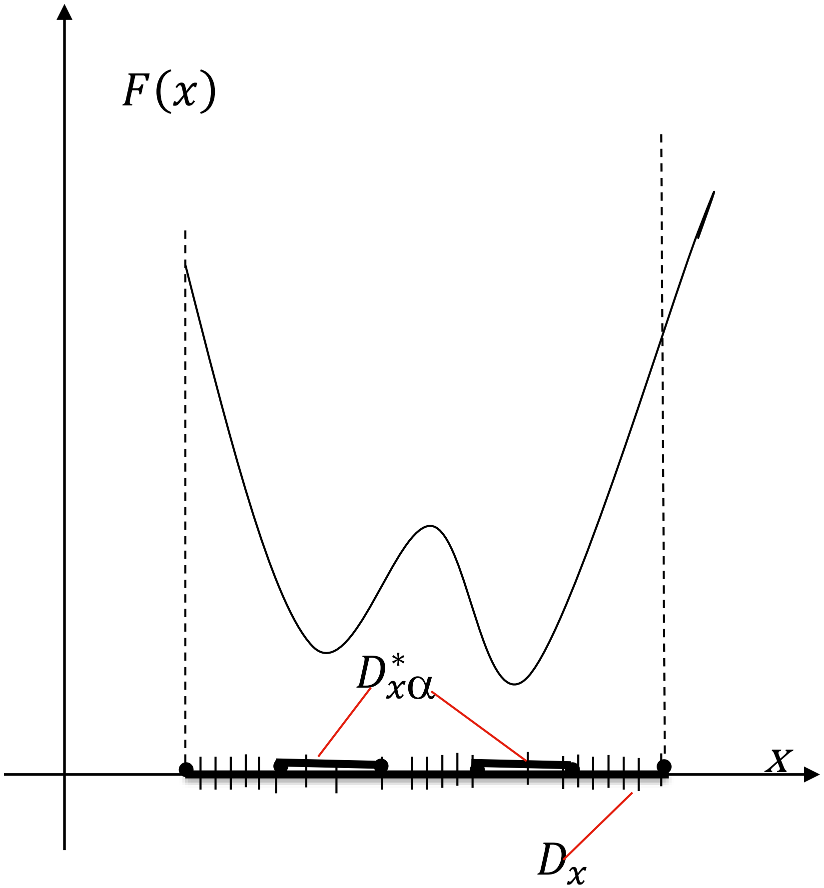
$$D^*_{xm} \to N^*_m = \min_{1 \le m \le M}\{N_m\}\ jezeli\ \|D_{xm}\| < \varepsilon\ stop, \forall punkt \in D^*_{xm}\ rozw.$$

W przeciwnym przypadku tj. $\|D^*_{xm}\| \ge \varepsilon$ $podstaw\ D_x := D^*_{xm}$

i idź do kroku 1

Politechnika Wrocławska

Poszukiwania losowe



$$f(x) = \frac{F(x)}{\int_{D_x} F(x)dx}$$

Poszukiwania losowe

Dane: $F(x), D_x, \varepsilon, N, M$

Krok 1: Generujemy N punktów w zbiorze D_x wg rozkładu

$$f(x) = \frac{F(x)}{\int_{D_x} F(x)dx}$$

Krok 2: Dzielimy zbiór D_x na M równolicznych rozłącznych podzbiorów

$$D_x = \dot{\bigcup_{m=1}^{M}} D_{xm}, \quad \|D_{xm}\| = \frac{1}{M}\|D_x\|$$

Krok 3. Liczymy punkty, które wpadną do poszczególnych zbiorów

$$N_m - liczba\ wygenerowanych\ punktów\ w\ zbiorze\ D_{xm}$$

Krok 4. Do dalszego podziału wybieramy taki

$$D^*_{xm\alpha} \rightarrow N^*_{m\alpha} \leq \alpha,\ D^*_{x\alpha} = \bigcup_m D^*_{xm\alpha} \ \ jezeli\ \|D^*_{x\alpha}\| < \varepsilon\ stop,\ \forall punkt \in D^*_{x\alpha}\ rozw.$$

W przeciwnym przypadku tj. $\|D^*_{x\alpha}\| \geq \varepsilon\ podstaw\ D_x := D^*_{x\alpha}$

i idź do kroku 1

Dziękuję za uwagę