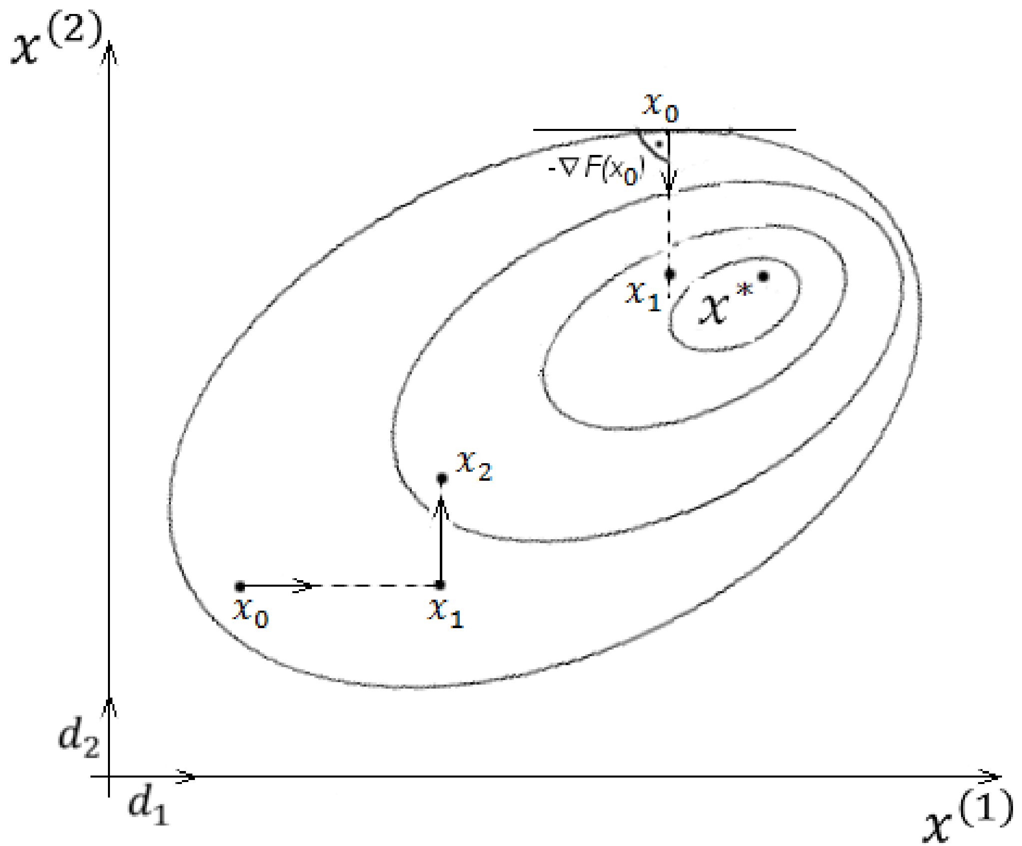
Politechnika Wrocławska

Bezgradientowe metody optymalizacji funkcji wielu zmiennych

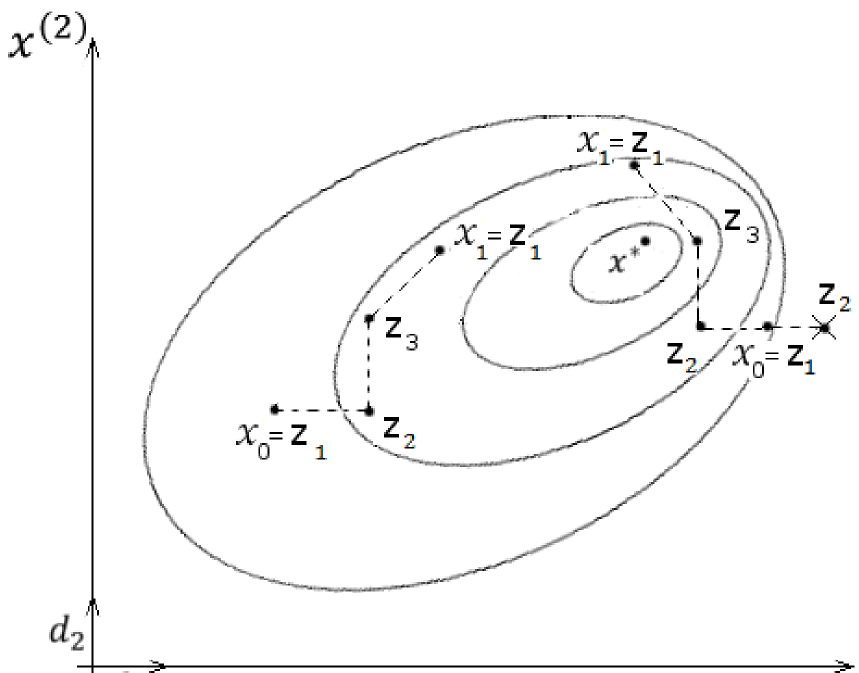
informacje dodatkowe

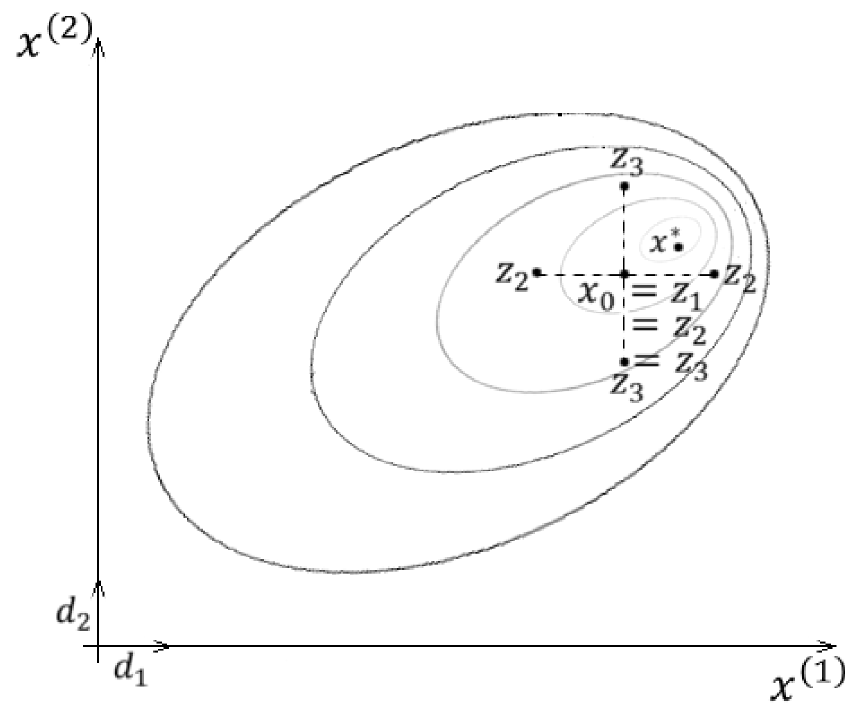
Wybór kierunku poszukiwań



- Kierunki bazowe i ich modyfikacje – metody bezgradientowe.
- Kierunki oparte na gradiencie funkcji – metody gradientowe.

Metoda Hooka-Jeveesa - z krokiem dyskretnym





$x^{(1)}$

τ- krok

$\alpha > 1$ współczynnik kroku roboczego

$\beta \in (0,1)$ współczynnika korekcji kroku

$\tau \coloneqq \tau\beta$

Metoda Hooka-Jeveesa - z krokiem dyskretnym

DANE: $d_1, d_2, \ldots, d_S, x_0, \tau, \varepsilon, \alpha, \beta$

Krok 0: $z_1 \coloneqq x_0, s = 1, n = 0$

Krok 1: $z_{s+1} \coloneqq z_s + \tau d_s$

Jeśli $F(z_{s+1}) < F(z_s)$ idź do kroku 2

w przeciwnym razie $z_{s+1} \coloneqq z_s - \tau d_s$

Jeśli $F(z_{s+1}) < F(z_s)$ idź do kroku 2

w przeciwnym razie $z_{s+1} \coloneqq z_s$

Krok 2: Jeśli $s < S,\ \ s \coloneqq s + 1$ idź do kroku 1

w przeciwnym razie

Jeśli $F(z_{S+1}) < F(z_1)$ idź do kroku 3

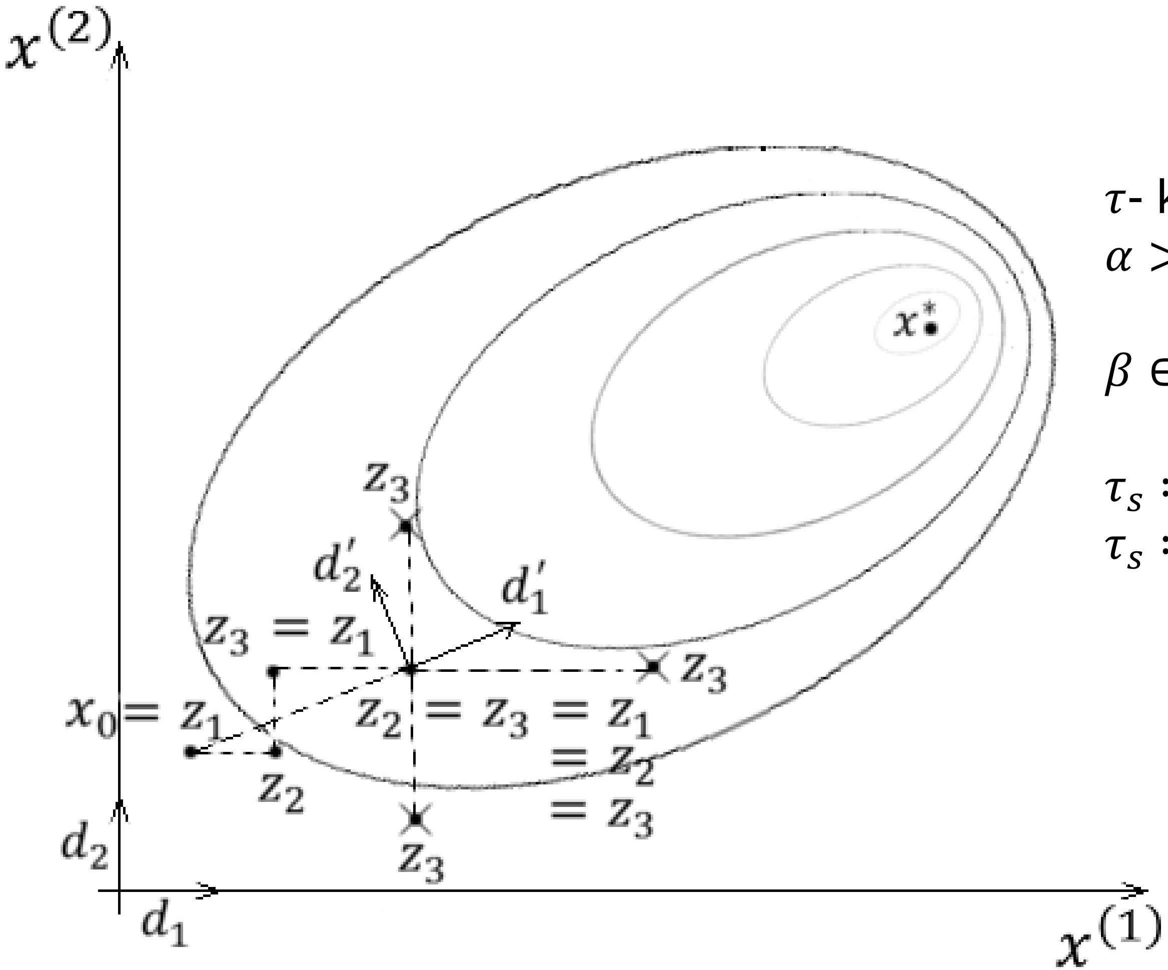
$\tau \coloneqq \tau\beta, x_{n+1} \coloneqq x_n, z_s \coloneqq x_n, n \coloneqq n + 1, s = 1$ idź do kroku 1

Krok 3: Jeśli $\tau < \varepsilon$, STOP

w przeciwnym razie

$x_{n+1} \coloneqq z_{S+1} + \alpha(z_{S+1} - z_1), n \coloneqq n + 1, s \coloneqq 1$ idź do kroku 1

Metoda Rozenbrocka - z krokiem dyskretnym



τ- krok

$\alpha > 1$ – współczynnik korekcji kroku

$\beta \in (-1, 0)$ - współczynnika korekcji kroku

$\tau_s \coloneqq \tau_s \alpha$

$\tau_s \coloneqq \tau_s \beta$

Metoda Rozenbrocka - z krokiem dyskretnym

DANE: $d_1, d_2, \ldots, d_S, x_0, \tau, \varepsilon, \alpha > 1, \beta \in (-1, 0)$

Krok 0: $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_S = \tau,\ \ \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_S = 0, \quad z_1 = x_0, \quad n = 0, \quad s = 1$

Krok 1: $z_{s+1} = z_s + \tau_s d_s, \qquad \delta_s = \delta_s + \tau_s$

IF $F(z_{s+1}) < F(z_s) \qquad \tau_s \coloneqq \alpha\tau_s \quad s \coloneqq s + 1,$ IDŹ DO KROKU 2

ELSE $F(z_{s+1}) \geq F(z_s) \quad \tau_s \coloneqq \beta\tau_s \quad s \coloneqq s + 1$ IDŹ DO KROKU 2

Krok 2: IF $s < S \quad s \coloneqq s + 1$ IDŹ DO KROKU 1

IF $F(z_{S+1}) < F(z_1) \quad z_1 \coloneqq z_{S+1} \quad s \coloneqq 1$ IDŹ DO KROKU 1

IF $F(z_{S+1}) = F(x_n)$

IF $n = 0$ zmień punkt startowy

ELSE $x_{n+1} = z_{S+1}$

Krok 3: IF STOP? (np.: $\|x_{n+1} - x_n\| < \varepsilon$) STOP

Krok 4: Obrót bazy

ELSE $n := n+1, s=1$

$\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_S = \tau,\ \ \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_S = 0,$ IDŹ DO KROKU 1

Obrót bazy

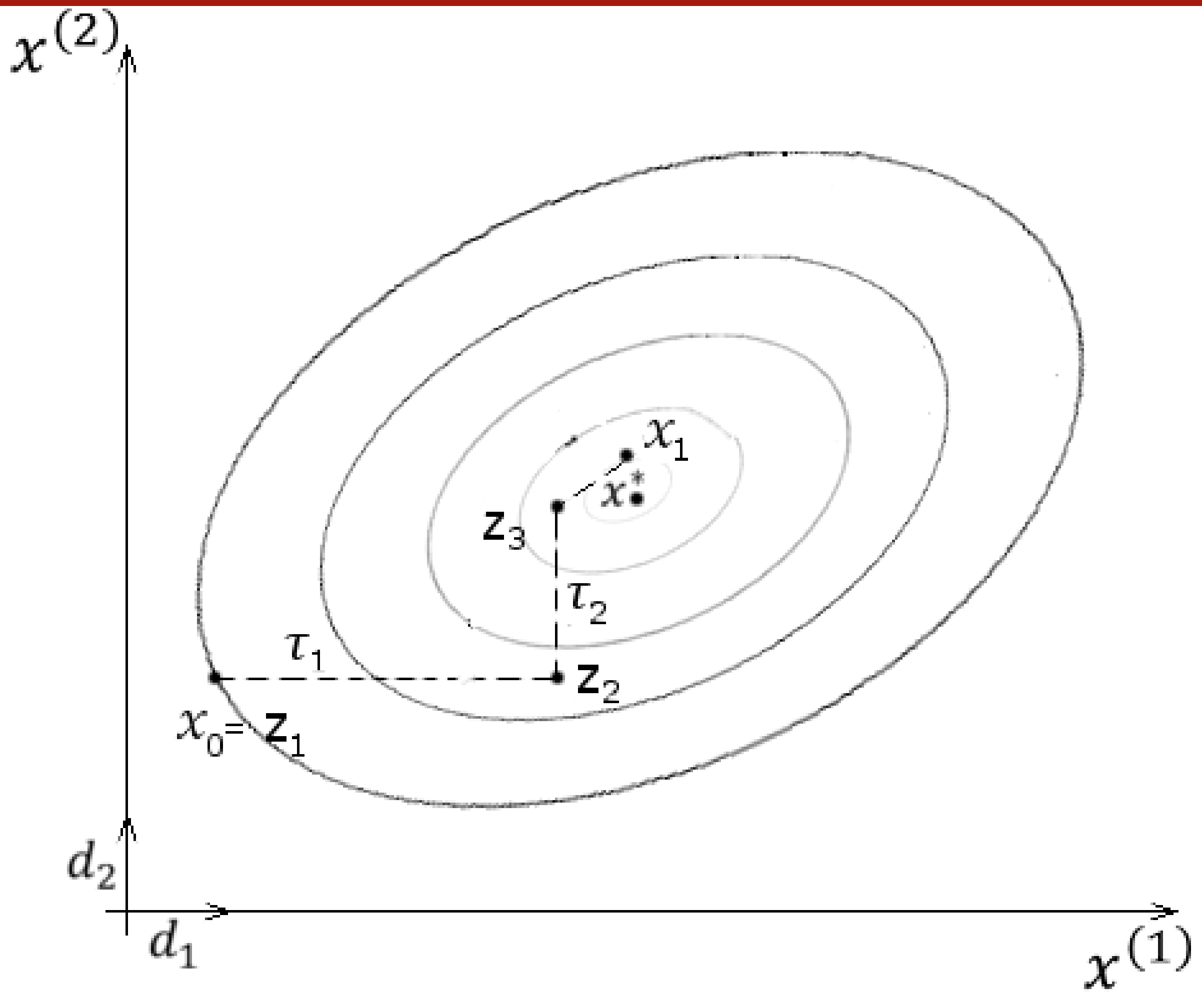
Krok 4:

$$a_s = \begin{cases} d_s & \delta_s = 0 \\ \sum_{j=s}^{S} \delta_j d_j & \delta_s \neq 0 \end{cases}$$

$$b_s = \begin{cases} a_s & s = 1 \\ a_s - \sum_{j=1}^{s-1} \left(a_j^T d_j'\right) d_j' \end{cases}$$

$$d_s' = \frac{b_s}{\|b_s\|} \qquad s = 1,2,\dots,S$$

Metoda Hooka-Jeveesa – z krokiem optymalnym



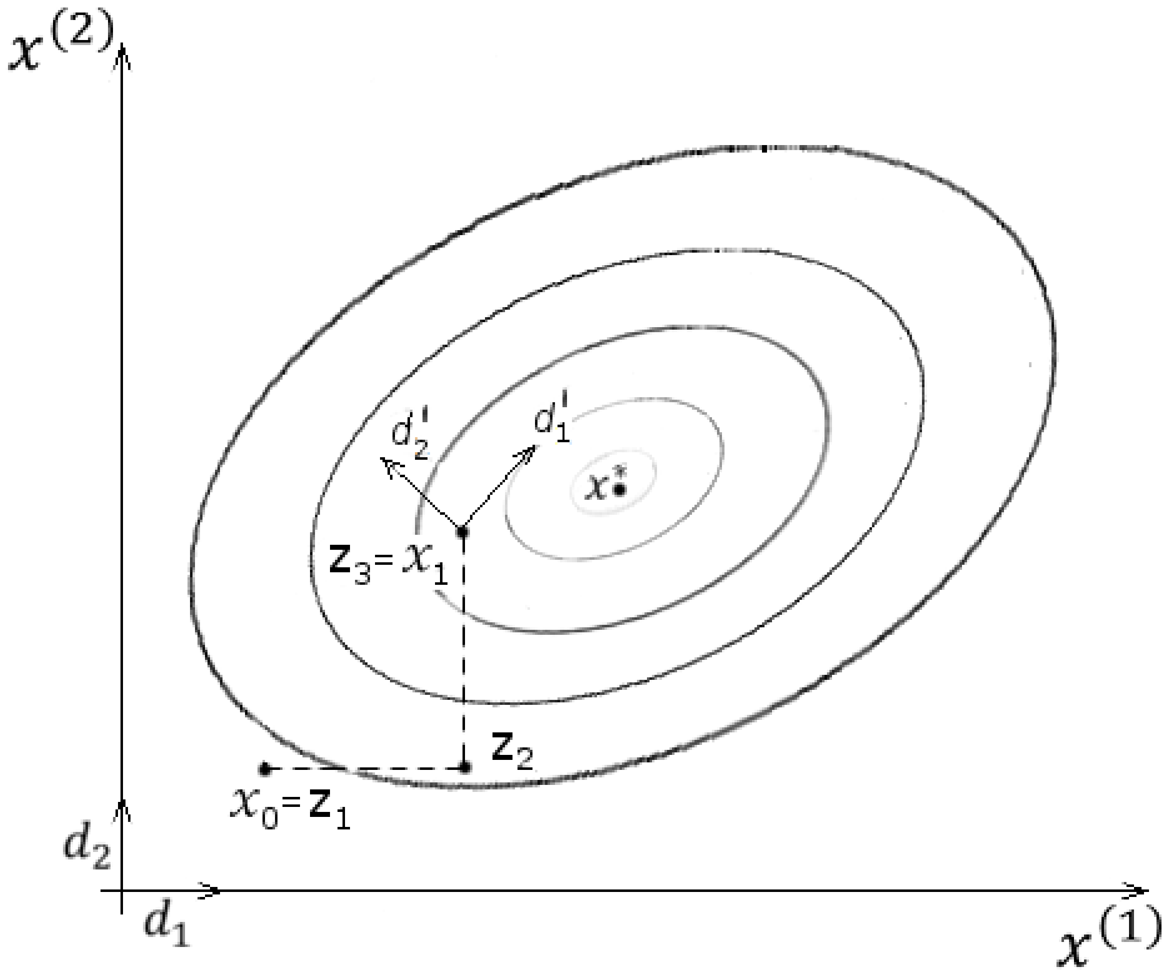
Metoda Hooka-Jeevesa - z krokiem optymalnym

DANE: $d_1, d_2, \dots, d_S, x_0, \varepsilon$
Krok 0: $z_1 \coloneqq x_0, n = 0, s = 1$
Krok 1: $z_{s+1} \coloneqq z_s + \tau_s d_s$
τ_s- min w kierunku d_s
Krok 2: Jeśli $s < S, s = s + 1$ idź do kroku 1
Jeśli $\|z_{S+1} - z_1\| < \varepsilon$ - STOP
Krok 3: $x_{n+1} \coloneqq z_s + \tau d$
$\tau \rightarrow$ min w kierunku d

$$d = \frac{z_{S+1} - z_1}{\|z_{S+1} - z_1\|} = \frac{\sum_{s=1}^{S+1} \tau_s d}{\|\sum_{s=1}^{S+1} \tau_s d\|}$$

$n \coloneqq n + 1, s = 1, z_1 = x_n$

Metoda Rozenbrocka - z krokiem optymalnym



Metoda Rozenbrocka - z krokiem optymalnym

DANE: $d_1, d_2, \dots, d_S, x_0, \varepsilon$

Krok 0: $z_1 \coloneqq x_0, n = 0, s = 1$

Krok 1: $z_{s+1} \coloneqq z_s + \tau_s d_s$

τ_s - min w kierunku d_s

Krok 2: Jeśli $s < S, s \coloneqq s + 1$ idź do kroku 1

Jeśli $\|z_{S+1} - z_1\| < \varepsilon$ - STOP

Krok 3:

$$a_s = \begin{cases} d_s & \tau_s = 0 \\ \sum_{j=s}^{S} \tau_j d_j & \tau_s \neq 0 \end{cases}$$

$$b_s = \begin{cases} a_s & s = 1 \\ a_s - \sum_{j=1}^{s-1} \left(a_j^T d_j'\right) d_j' \end{cases}$$

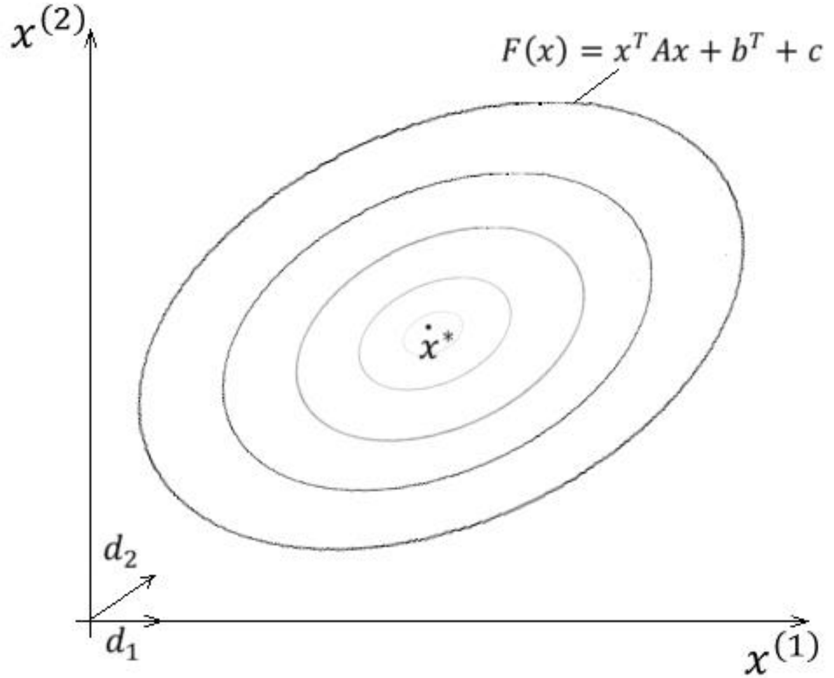
$$d_s' = \frac{b_s}{\|b_s\|} \qquad s = 1,2, \dots, S$$

Krok 4: $d_s \coloneqq d_s' \quad s = 1,2, \dots, S, n \coloneqq n + 1, s = 1$ idź do kroku 1

Metoda Powella - wektory sprzężone

$d_1, d_2, \ldots, d_S$ - sprzężone według macierzy A, symetrycznej i dodatnio określonej

$$d_i^T A d_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$



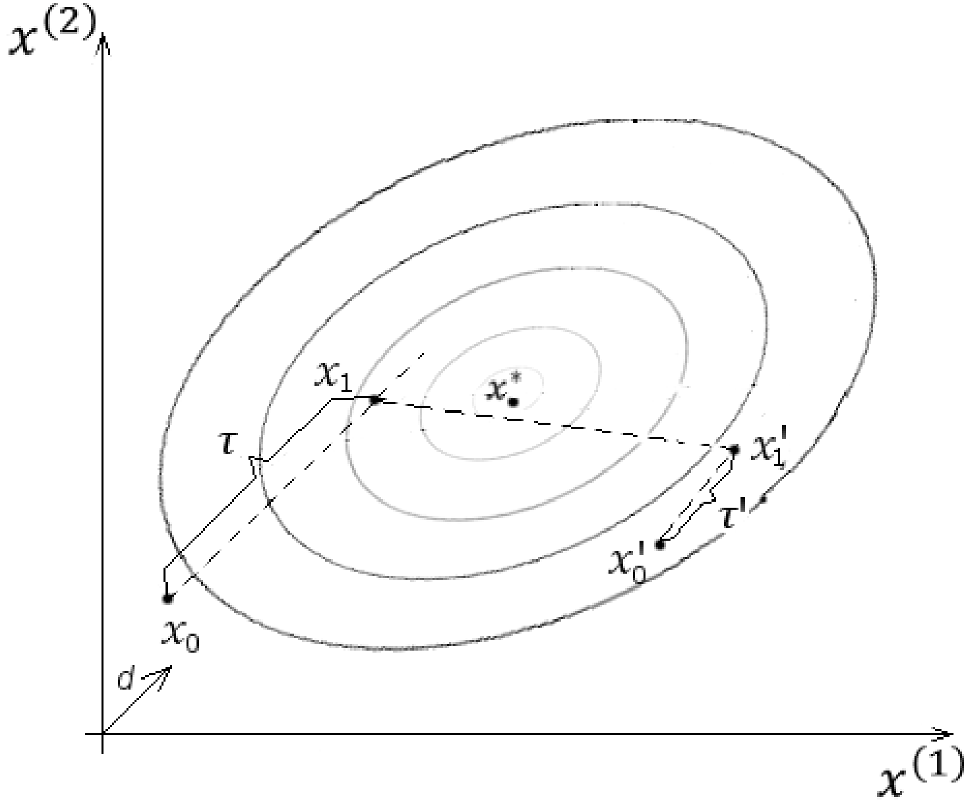
Metoda Powella - wektory sprzężone

$F(x) = x^T A x + b^T x + c$

Dla tak dobranej funkcji, jeżeli zestaw wektorów $d_1, d_2, \dots, d_S$ jest sprzężony według macierzy A, to minimalizując wzdłuż kierunków sprzężonych otrzymamy rozwiązanie w nie więcej niż S krokach.

Metoda Powella

$F(x) = x^T A x + b^T + c$

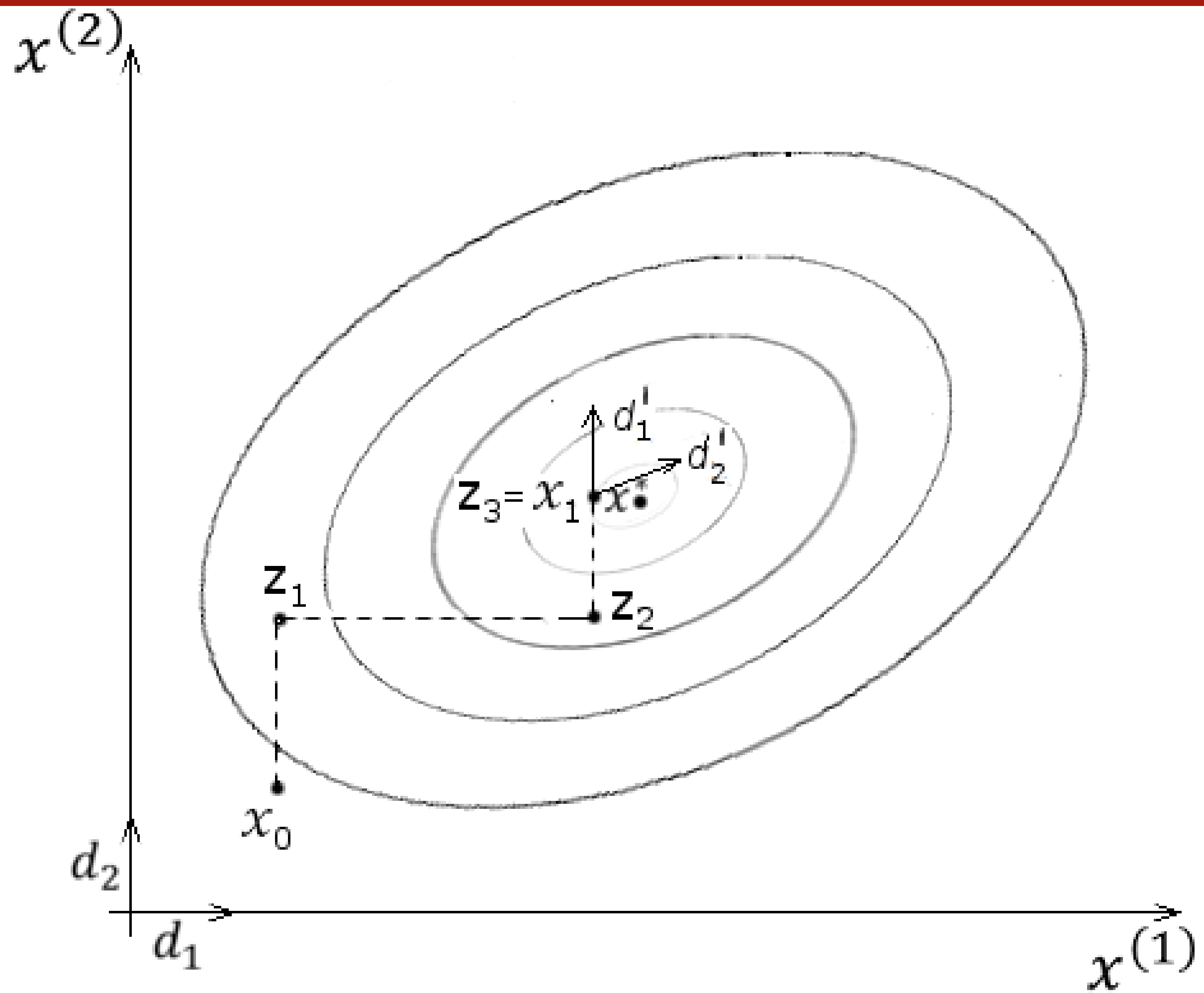


$x_1 = x_0 + x^* d$
τ^* - min w kierunku d z x_0
$x_1' = x_0' + \tau^{*\prime} d$
$\tau^{*\prime}$ - min w kierunku d z x_0'

$d^T A d' = 0$
d, d'- sprzężone według A

$$d' = \frac{x_1' - x_1}{\|x_1' - x_1\|}$$

Metoda Powella



Metoda Powella

DANE: $d_1, d_2, \ldots, d_S, x_0, \varepsilon$

Krok 0: $z_1 := x_0 + \tau_S d_S, n := 0, s := 1$

τ_S - min w kierunku d_S

Krok 1: $z_{s+1} = z_s + \tau_s d_s$

τ_s - min w kierunku d_s

Krok 2: Jeśli $s < S, s := s + 1$ idź do kroku 1

Jeśli $\|z_{S+1} - z_1\| < \varepsilon$ - STOP

Krok 3: $x_{n+1} := z_{s+1}$

$d := \frac{z_{S+1} - z_1}{\|z_{S+1} - z_1\|}$

$z_1 := x_{n+1} + \tau d$ τ – min w kierunku d

$d_s := d_{s+1}$ $s = 1, 2, \ldots, S - 1$

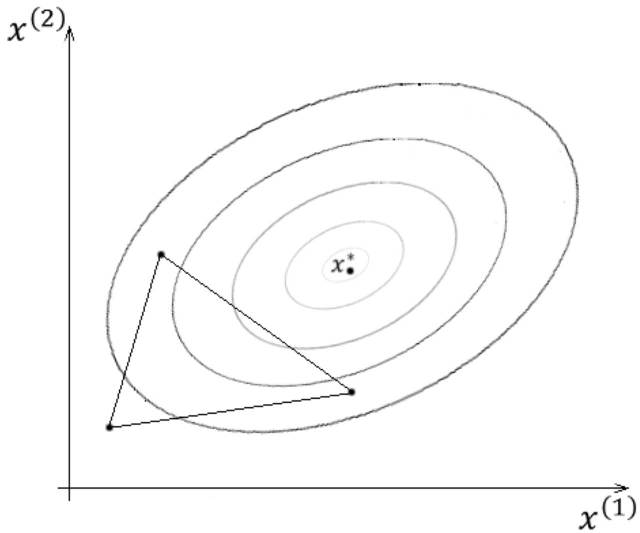
$d_S := d$

$\tau_{max} \rightarrow \max_{1 \le s \le S} \|z_{s+1} - z_s\| = \max_{1 \le s \le S} \tau_s$

$d_{max} = d$ $\Delta := \frac{\tau_m \Delta}{\|z_{S+1} - z_1\|} > 0.8$

Metoda Neldera-Meada (simplex)

$x_1 \; x_2 \; \ldots x_{S+1}$ - simplex w przestrzeni s-wymiarowej



$$x_H \rightarrow F(x_H) = \max_{1 \le s \le S+1} F(x_s)$$
$$x_L \rightarrow F(x_L) = \min_{1 \le s \le S+1} F(x_s)$$
$$\bar{x} = \frac{1}{s} \sum_{s=1, s \ne H}^{S+1} x_s$$

Generowanie simplexu początkowego

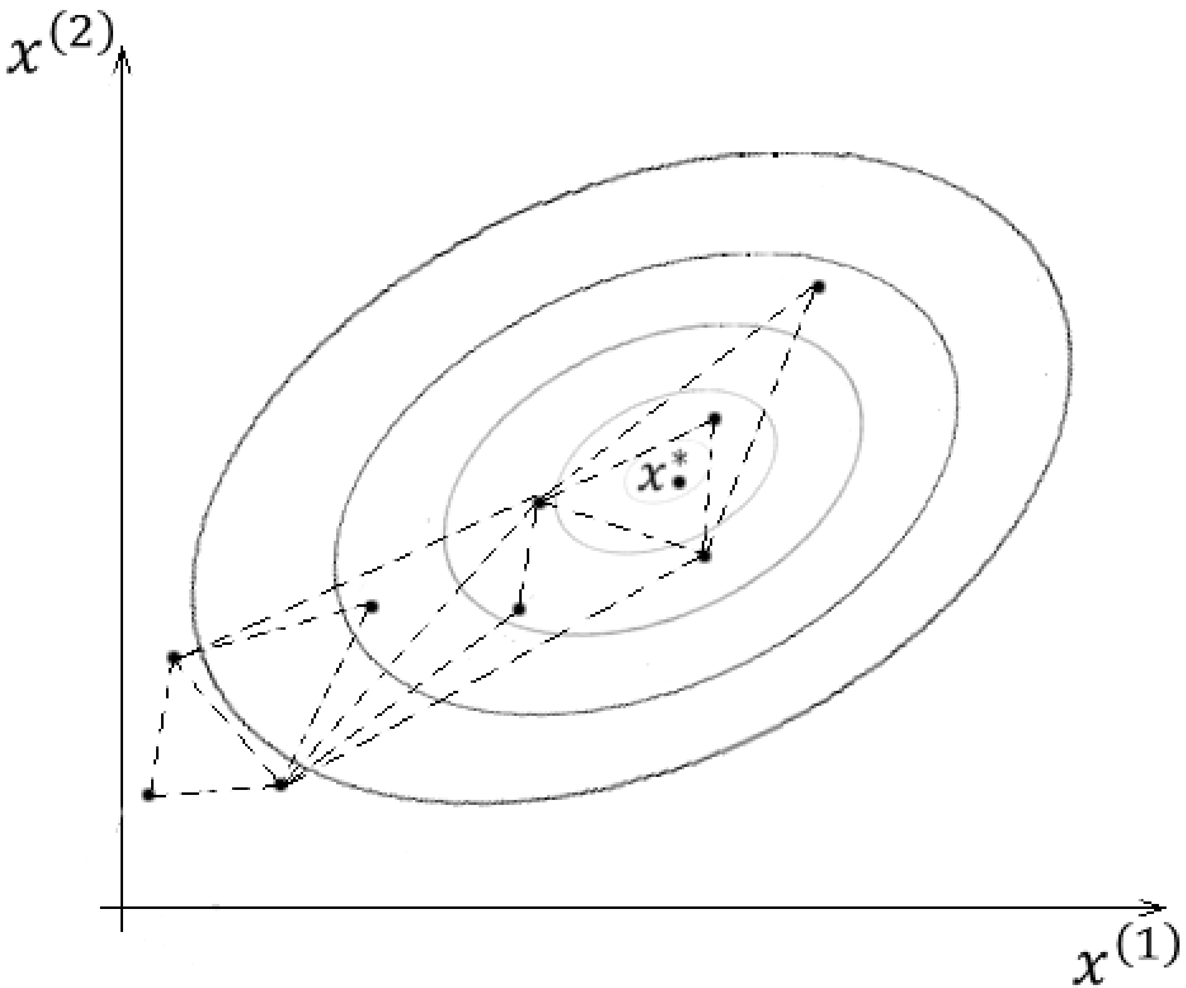
x_0, c

$$a = \frac{c}{S\sqrt{2}}(\sqrt{S+1} + \sqrt{2} - 1)$$
$$\mathrm{b} = \frac{c}{S\sqrt{2}}(\sqrt{S+1} - 1)$$

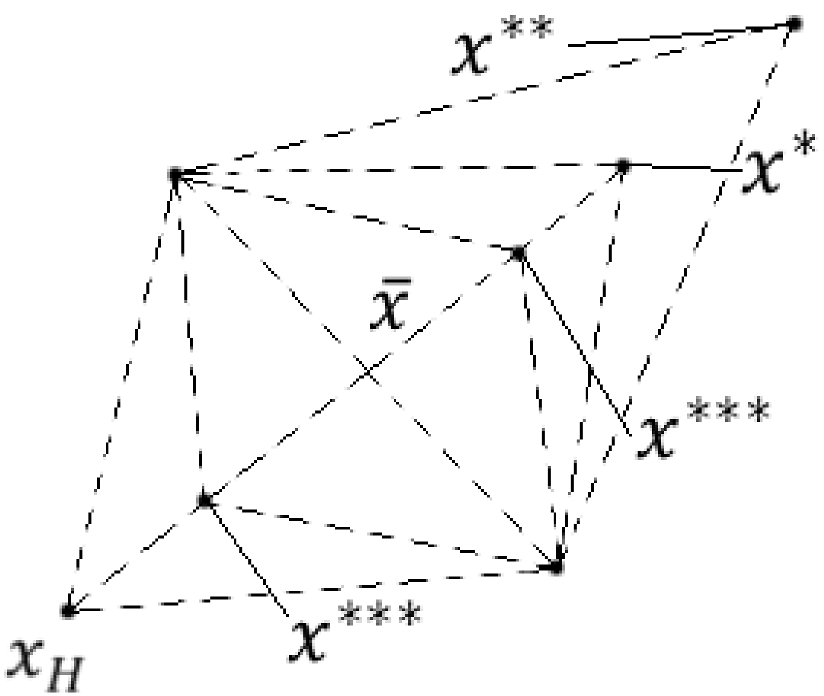
$d_j = [\quad]$

$$x_i = x_0 + d_j, x_{S+1} = x_0$$

Metoda Neldera-Meada (simplex)



Metoda Neldera-Meada



Odbicie

$x^{*} = \bar{x} + \alpha(\bar{x} - x_H)$

α – współczynnik odbicia

Jeśli $\alpha > 0$

$F(x^{*}) < F(x_L)$

Ekspansja

$x^{**} = \bar{x} + \gamma(x^{*} - \bar{x}) \qquad \gamma > 1$

γ – współczynnik ekspansji

Kontrakcja

Jeśli $F(x^{*}) > F(x_H)$

$x^{***} = \bar{x} + \beta(x_H - \bar{x})$

Jeśli $F(x^{*}) > \max\limits_{\substack{1 \le s \le S+1 \\ s \ne H}} F(x_s)$

$x^{***} = \bar{x} + \beta(x^{*} - \bar{x}) \qquad \beta \in (0, 1)$

β – współczynnik kontrakcji

Metoda Neldera-Meada

DANE: x_0, c, ε

Krok 0: $x_1\ x_2\ \dots\ x_{S+1}$ - simplex początkowy, $n = 0$

Krok 1: $x_H \to F(x_H) = \max\limits_{1 \le s \le S+1} F(x_s), x_L \to F(x_L) = \min\limits_{1 \le s \le S+1} F(x_s)$

$\bar{x} = \frac{1}{S} \sum_{\substack{s=1 \\ s \ne H}}^{S+1} x_s$

Krok 2: $x^* = \bar{x} + \alpha(\bar{x} - x_H)$

Jeśli $F(x^*) < F(x_L)$ $\quad x^{**} = \bar{x} + \gamma(x^* - \bar{x})$ idź do kroku 3

w przeciwnym razie idź do kroku 4

Krok 3: Jeśli $F(x^{**}) < F(x^*)$ $\quad x_H = x^{**}, n = n + 1$ idź do kroku 1

w przeciwnym razie $x_H = x^*, n = n + 1$ idź do kroku 1

Krok 4: Jeśli $F(x^*) < \max\limits_{\substack{1 \le s \le S+1 \\ s \ne H}} F(x_s)$ $\quad x_H = x^*, n = n + 1$

Krok 5: $x' - \quad F(x') = \min\{F(x^*), F(x_H)\}$

$x^{***} = \bar{x} + \beta(x' - \bar{x})$

Jeśli $\mathrm{F}(x^{***}) > F(x')$ $\quad x_j = x_j + \frac{1}{2}(x_L - x_j), j = 1,2, \dots, S + 1$ idź do kroku 1

$x_H = x^{***}, n = n + 1$ idź do kroku 1

Dziękuję za uwagę