

Modelowanie

Zad. 1.

Procesy wykładniczego wzrostu i spadku (np. populacja bakterii, rozpad radioaktywny, wymiana ciepła) można modelować równaniem różniczkowym:

$$x'(t) = ax(t) \tag{1}$$

z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$.

Odgadnij rozwiązania tego równania i sprawdź je.

Zad. 2.

Załącz, że $x(t)$ w równaniu (1) oznacza ilość materiału radioaktywnego w chwili t . Materiał scharakteryzowany jest czasem połowicznego rozpadu $T_{\frac{1}{2}}$. Jak parametr modelu a zależy od $T_{\frac{1}{2}}$?

Zad. 3.

Sprawdź, że rozwiązaniami równania drugiego rzędu:

$$x''(t) = -cx(t), \quad c > 0 \tag{2}$$

są:

a) $\sin t$

d) $\sin \omega t$

b) $\cos t$

e) $\cos \omega t$

c) $a \sin t + b \cos t$

f) $a \sin \omega t + b \cos \omega t$

W przykładach a), b), c) możesz przyjąć $c = 1$.

Zad. 4.

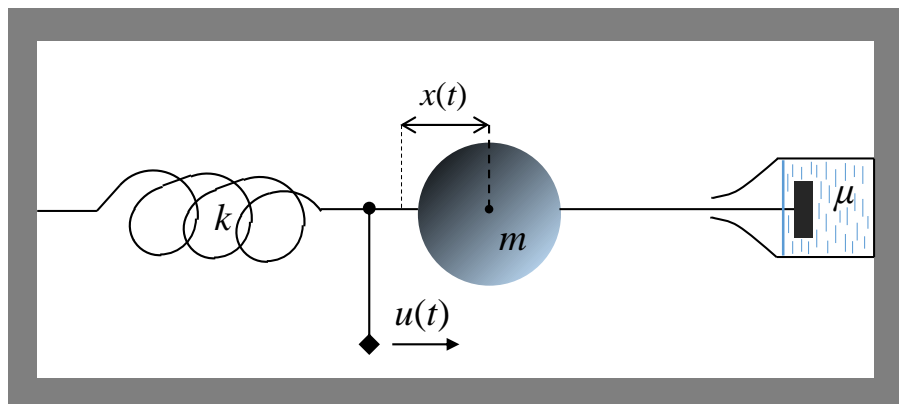
Pokaż, że $\sin(\omega t + \varphi)$ jest również rozwiązaniem równania (2), ale sprowadza się do przypadku f) z zadania 3.

Zad. 5.

Modelem oscylatora harmonicznego tłumionego jest równanie:

$$x''(t) + \frac{\mu}{m}x'(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{1}{m}u(t), \quad (3)$$

gdzie x jest odchyleniem oscylatora od stanu równowagi, m – masą oscylatora, k – stałą sprężystości, μ – współczynnikiem tłumienia, u - siłą przyłożoną do oscylatora.



Jakie jest znaczenie wielkości $x'(t)$?

Rozważ sytuację bez oporów ruchu, gdy oscylator – po nadaniu pewnego odchylenia początkowego – pozostaje bez oddziaływania z zewnątrz (czyli $u(t) = 0(t)$):

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \quad (4)$$

Jak wówczas częstotliwość drgań oscylatora zależeć będzie od jego masy m oraz stałej sprężystości k ?

Zad. 6.

Wyznacz transformaty Laplace'a poniższych funkcji, korzystając z tabeli transformat:

a) $8 - 3e^{3t}$

d) $\cos 5t - e^{-3t}$

b) $4 \sin 5t - 2e^{5t} + 5$

e) $\frac{1}{2} (\sin 3t - t \cos t)$

c) $\frac{e^{5t} - e^t}{3t}$

f) $e^{-2t} \sin t$

Zad. 7.

Wyznacz transmitancje obiektów dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi:

a) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u'(t) + u(t)$, b) $y'(t) + 2y(t) = u(t)$.

Wyciągnij wnioski z otrzymanych rezultatów.

Zad. 8.

Układ liniowy ciągły na wymuszenie $u(t) = 1(t)$ odpowiedział sygnałem $y(t) = e^{-t}$. Wyznacz transmitancję tego układu.

Zad. 9.

Znajdź opis w postaci wektora stanu dla oscylatora harmonicznego, najpierw bez sygnału wejściowego, potem z uwzględnieniem wejścia.

Zad. 10.

Przebieg rakowacenia komórek tkanki można modelować następującym układem równań różniczkowych (dla zwiększenia czytelności formuł pominięto zależność od czasu zmiennych stanu pozostawiając ten szczegół domyślności Czytelnika):

$$\begin{cases} x'_1 = -ax_1 - cx_1 + bx_2 \\ x'_2 = ax_1 - bx_2 - dx_2 \\ x'_3 = cx_1 + dx_2 \end{cases}$$

gdzie:

x_1 – frakcja komórek wrażliwych na lek,

x_2 – frakcja komórek tymczasowo odpornych,

x_3 – frakcja komórek permanentnie odpornych.

Wykorzystaj fakt, że $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ aby zredukować model do 2 wymiarów x_1, x_3 .

Zapisz oba modele, oryginalny i zredukowany, za pomocą macierzy systemowej \mathbf{A} :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (5)$$

Zad. 11.

Sprawdź, że $x_1(t) = \cos t - 3 \sin t$, $x_2(t) = 2 \cos t - \sin t$ stanowią rozwiązanie układu równań różniczkowych opisanych macierzą systemową:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Zad. 12.

Znajdź wartości i wektory własne macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

Zad. 13.

Znajdź wartości i wektory własne macierzy, w których $a > 0$:

a) $\begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -a & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -a \\ 2a & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix}, z_i \in \{-1, 0, 1\}$

Zad. 14.

Zbadaj stabilność stanów równowagi systemów o podanych opisach:

a) $x' = ax$

b) $\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -x_1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x'_1 = -x_1 \\ x'_2 = -2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x'_3 = -3x_1 - 2x_2 - x_3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x'_1 = ax_1 + bx_2 \\ x'_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases}$

Zad. 15.

Zbadaj charakter stanów równowagi procesów liniowych opisanych podanymi macierzami systemowymi:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

Zad. 16.

Dany jest dwuwymiarowy liniowy proces opisany macierzą systemową

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Pokaż, że analizę stabilności tego procesu można przeprowadzić, korzystając jedynie ze śladu macierzy $\text{tr}(\mathbf{A})$ i jej wyznacznika $\det(\mathbf{A})$.

Zad. 17.

Wyznacz stany równowagi $\bar{\mathbf{x}}$ procesu liniowego:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}, \tag{6}$$

gdzie \mathbf{c} jest wektorem stałych o odpowiednich wymiarach.

Następnie wprowadź oznaczenie $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ i pokaż, że można za jego pomocą zredukować układ (6) do układu autonomicznego: $\mathbf{w}' = \mathbf{A}\mathbf{w}$. Jaki wniosek

można z tego wyniku wyciągnąć, mając na uwadze analizę stabilności systemów liniowych?

Zad. 18.

Wyznacz liniowe przybliżenie funkcji $y = f(x) = x^2$ wokół punktu pracy $x^* = 2$. Rezultat zinterpretuj graficznie.

Zad. 19.

Znajdź liniowe przybliżenie układu poniższych dwóch funkcji wokół dowolnego punktu:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 1 - x_1x_2 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

Zad. 20.

Zbadaj stabilność poniższego układu nieliniowego wokół jego stanu równowagi:

$$\begin{cases} x_1' = 1 - x_1x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

Zad. 21.

Zbadaj stabilność nieliniowych systemów o podanych opisach:

a) $\begin{cases} x_1' = -5x_1 + x_1x_2 \\ x_2' = x_2 - 5x_1x_2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1' = \ln x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1(1 - x_1 - x_2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_1^2 - 6x_1x_2 \\ x_2' = 2x_2 - 8x_2^2 - 2x_1x_2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x' = -xy + y + ax \\ y' = 2y - xy \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1' = e^{-x_1}(x_1 - x_2) \\ x_2' = x_1 - x_2^2 + 2x_1x_2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x' = ax^2 + ay - x \\ y' = x - y \end{cases}, \quad a \neq 0$

Zad. 22.

Zlinearyzuj względem początku układu współrzędnych następujące procesy:

a) $\begin{cases} x_1'(t) = 3x_2(t) + x_1(t)x_2(t) + [x_2(t)]^2 - u^2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + e^{-x_2(t)} \sin x_1(t) + 2u(t) \\ y(t) = x_1(t) + u(t) \end{cases}$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) \cdot \sin x_2(t) + x_2(t)u(t) \\ x_2'(t) = x_1(t)e^{-x_2(t)} + u^2(t) \\ y(t) = 2x_1(t)x_2(t) + [x_2(t)]^2 \end{cases}$$

Następnie wyznacz wzór określający stany równowagi \bar{x} zlinearyzowanych procesów dla zadanych sterowań $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$.

Zad. 23.

Znajdź model w postaci równania różniczkowego odwróconego wahadła umieszczonego na ruchomym wózku. Opracuj jego opis w postaci wektora stanu. Zlinearyzuj model wokół niestabilnego położenia równowagi.

Zad. 24.

Przeprowadź analizę stabilności układu Lotki-Volterra:

$$\begin{cases} x' = (a - by) x \\ y' = (cx - d) y \end{cases}$$

Zad. 25.

Przeprowadź analizę stabilności układu Lorentza:

$$\begin{cases} x' = \sigma (y - x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

przy czym parametry σ, r, b są nieujemne.

Jak stabilność zależy od wartości parametru r ? Dla jakich wartości r stany równowagi pokrywają się? Dla jakich wartości r występują oscylacje?

Jeżeli na którymś etapie rozważań konieczne jest ustalenie konkretnych wartości parametrów σ i b , możesz przyjąć $\sigma = 10$, $b = 8/3$.

Zad. 26.

Rozważ prosty proces dyskretny opisany równaniem:

$$x_{i+1} = ax_i \tag{7}$$

Omów, jak zachowanie tego procesu zależy od warunku początkowego oraz od wartości parametru a , posługując się jedynie elementarnymi wiadomościami z matematyki.

Zastanów się, w jaki sposób powyższe równanie może opisywać stan lokaty bankowej. Jak w modelu uwzględniany jest czas kapitalizacji odsetek? Czy można za jego pomocą modelować lokatę z ciągłą kapitalizacją odsetek?

Zad. 27.

Znajdź stan równowagi procesu opisanego równaniem różnicowym:

$$x_{i+1} = ax_i(1 - x_i) \quad (8)$$

oraz jego liniowego przybliżenia. Porównaj rezultaty. Zweryfikuj wyniki za pomocą symulacji komputerowej.

Zad. 28.

Wyznacz opis w postaci wektora stanu dla procesu:

$$y_{i+3} - \frac{1}{2}y_{i+2} = y_{i+1} + 2u_i - \frac{1}{3}y_i$$

DODATEK

Transformatą Laplace'a nazywamy następujące przekształcenie:

$$L[f(t)] \equiv F(s) \equiv \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad \text{gdzie } s \text{ jest zmienną zespoloną.}$$

Transformata Laplace'a posiada następujące własności:

1. $L[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F(s) + a_2 F(s)$, gdzie $a_1, a_2 \in \mathcal{R}$.
2. $L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$.

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\delta(t)$	1	$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\frac{t^n}{n!}, n \in \mathcal{N}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$	$e^{at} \frac{t^n}{n!}, n \in \mathcal{N}$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$
$t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$		

Tablica 1: Tabela często używanych transformat Laplace'a

Transmitancją liniowego procesu o zerowych warunkach początkowych nazywamy stosunek transformaty Laplace'a wyjścia do transformaty Laplace'a wejścia:

$$K(s) \equiv \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Opis w postaci **wektora stanu** ma formę układu:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = G(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{cases},$$

gdzie $\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ to wektory o określonych wymiarach:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_S \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_L \end{bmatrix}$$

Funkcje F i G są funkcjami wektorowymi o postaciach:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ f_R(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix}, \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ g_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ g_L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix}$$

W szczególnym przypadku, liniowy proces można opisać za pomocą układu:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases},$$

gdzie $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ to macierze o odpowiednich wymiarach:

$$\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{R \times R}, \mathbf{B} \in \mathcal{R}^{R \times S}, \mathbf{C} \in \mathcal{R}^{L \times R}, \mathbf{D} \in \mathcal{R}^{L \times S}.$$

Metoda **linearyzacji** bazująca na rozwinięciu w szereg Taylora pozwala uzyskać dla opisu

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = G(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{cases}$$

opis liniowy

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x}' = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{D} \Delta \mathbf{u} \end{cases},$$

gdzie $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$, $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^*$, $\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}^* = \mathbf{y} - G(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$,
 będący jego przybliżeniem w otoczeniu wybranego punktu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{u}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_R^* \\ u_1^* \\ \vdots \\ u_S^* \end{bmatrix}.$$

Macierze wchodzące w skład przybliżenia liniowego mają postać:

$$\mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_R} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_R}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_R}{\partial x_R} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*}$$

$$\mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{u}} F(\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_R}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_R}{\partial u_S} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*}$$

$$\mathbf{C} = \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_R} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_L}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_L}{\partial x_R} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*}$$

$$\mathbf{D} = \nabla_{\mathbf{u}} G(\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_L}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_L}{\partial u_S} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*}$$

Przyjmujemy, że **stan równowagi** \mathbf{x}^* procesu opisanego za pomocą wektora stanu to taki punkt, w którym $\mathbf{x}' = 0$ (dla procesu ciągłego) lub $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n$ (dla procesu dyskretnego).

Analiza stabilności liniowych systemów autonomicznych

Autonomiczny system liniowy o opisie $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ma stan równowagi w środku układu współrzędnych ($\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Stan równowagi \mathbf{x}^* systemu dyskretnego o opisie $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n$ spełnia warunek $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*$. Jeżeli $\det \mathbf{A} - \mathbf{I} \neq 0$, to system dyskretny ma dokładnie jeden stan równowagi, w przeciwnym razie tych stanów jest nieskończenie wiele.

Stan równowagi \mathbf{x}^* nazywamy stabilnym, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że każde rozwiązanie $\mathbf{x}(t)$ dla stanu początkowego $\mathbf{x}(0)$ leżącego w pobliżu \mathbf{x}^* , tj. $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\| < \delta$ istnieje dla $t > 0$ i spełnia warunek $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon$.

Jeżeli dodatkowo $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ to stan równowagi \mathbf{x}^* nazywamy asymptotycznie stabilnym.

Definicja stabilności systemu dyskretnego jest analogiczna (po zmianie dziedziny czasu ciągłego na czas dyskretny).

Stan równowagi $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ autonomicznego systemu liniowego o opisie $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ jest asymptotycznie stabilny, jeżeli wszystkie wartości własne macierzy \mathbf{A} mają ujemne części rzeczywiste.

Stan równowagi \mathbf{x}^* autonomicznego systemu liniowego o opisie $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n$ jest asymptotycznie stabilny, jeżeli moduły wszystkich wartości własnych macierzy \mathbf{A} są mniejsze od 1.

Piękne i przydatne wzory:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$