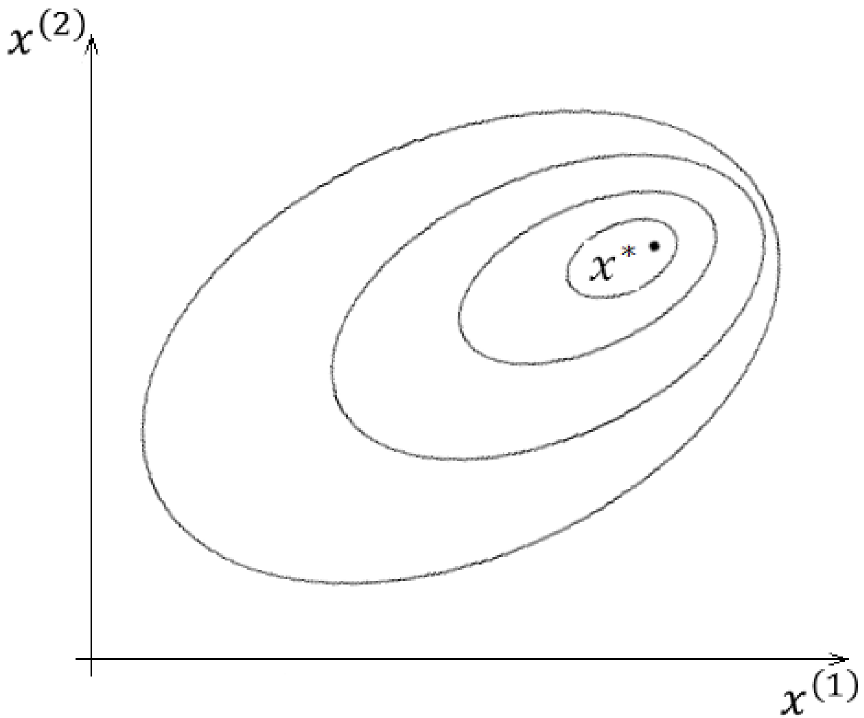
Politechnika Wrocławska

Numeryczne metody optymalizacji
Optymalizacja w kierunku

informacje dodatkowe

Numeryczne metody optymalizacji

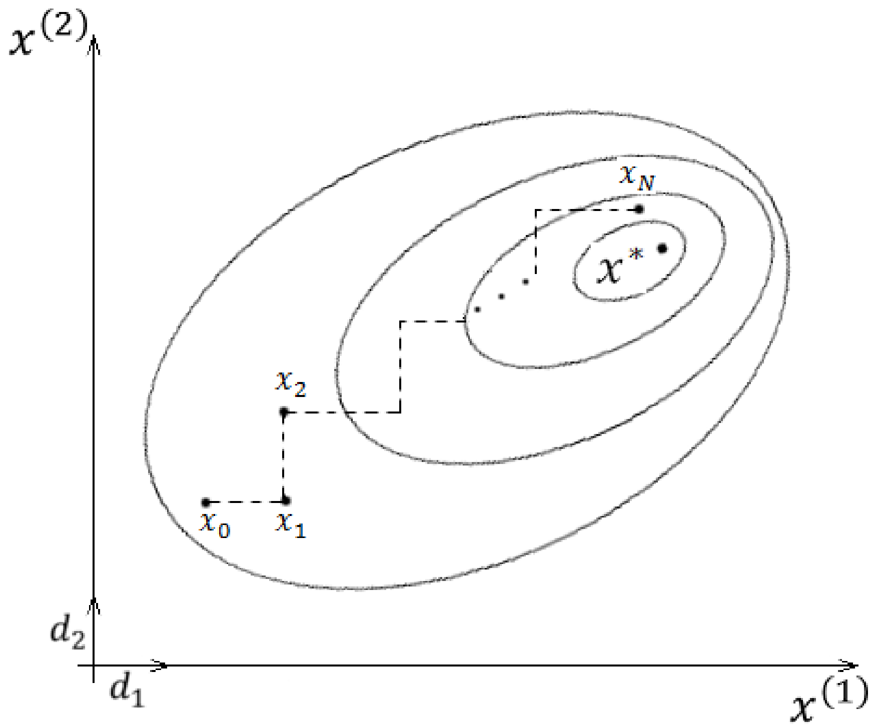
$$x^* \to F(x^*) = \min_{x \in D_x} F(x)$$



Problemy analityczne:

1. Nieliniowa złożona funkcja celu F i ograniczeń φ oraz ψ.
2. Nieróżniczkowalność funkcji F, φ oraz ψ.
3. Nie jest znana postać analityczna funkcji F, φ oraz ψ, można jedynie „zmierzyć" wartość funkcji
4. Duży wymiar wektora zmiennych decyzyjnych.

Numeryczne metody optymalizacji



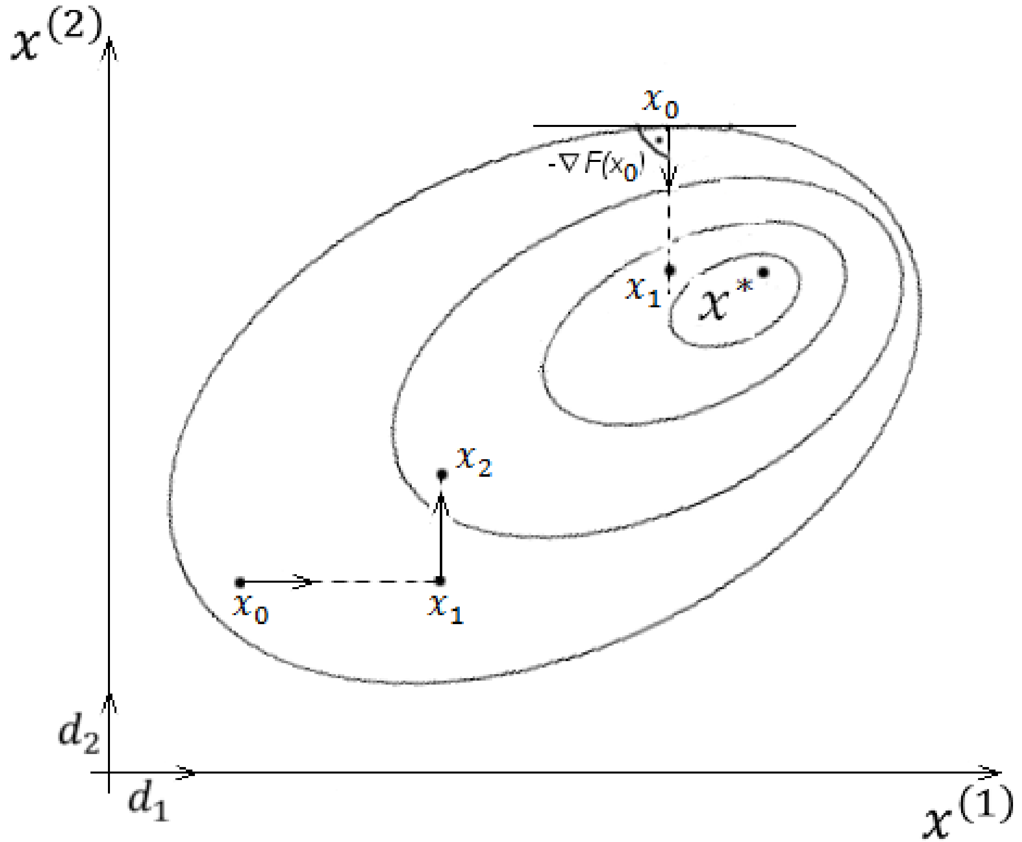
Algorytm
$x_{n+1} = \Psi(x_n), x_0$

- Wybór kierunku poszukiwań.
- Optymalizacja w kierunku.
- Warunki zatrzymania procedury.

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots, x_N \approx x^*$$
$$F(x_0) > F(x_1) > \dots > F(x_n) > \dots > F(x_N) \approx F(x^*)$$

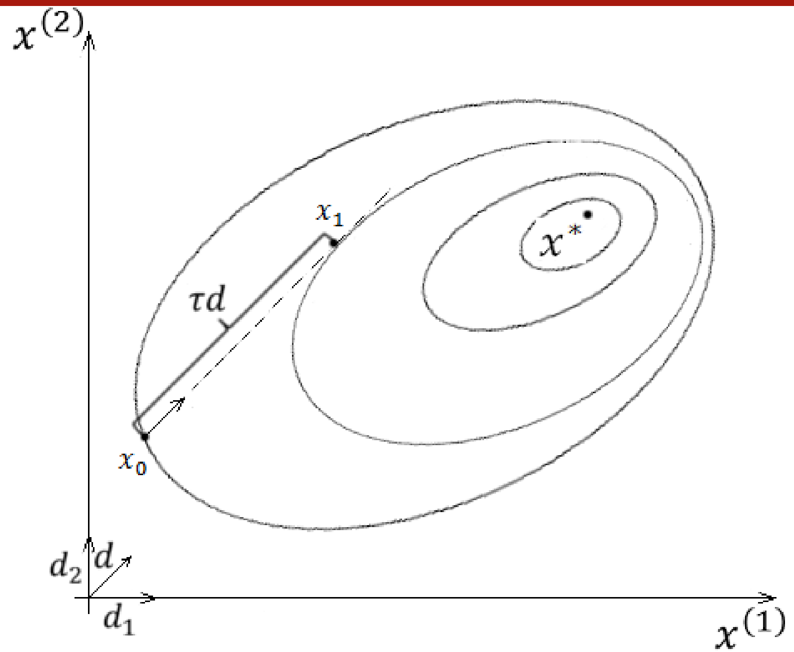
Politechnika Wrocławska

Wybór kierunku poszukiwań



- Kierunki bazowe i ich modyfikacje – metody bezgradientowe.
- Kierunki oparte na gradiencie funkcji – metody gradientowe.

Optymalizacja w kierunku



x_0 - punkt początkowy
x_1 - punkt końcowy
d - kierunek
τ - długość kroku w kierunku

$\tau^* \to F(x_0 + \tau^* d) = \min_{\tau} F(x_0 + \tau d)$

x_0, d – ustalone $F(x_0 + \tau d) \triangleq f(\tau)$

$f(\tau)$ – funkcja jednej zmiennej (długości kroku τ)

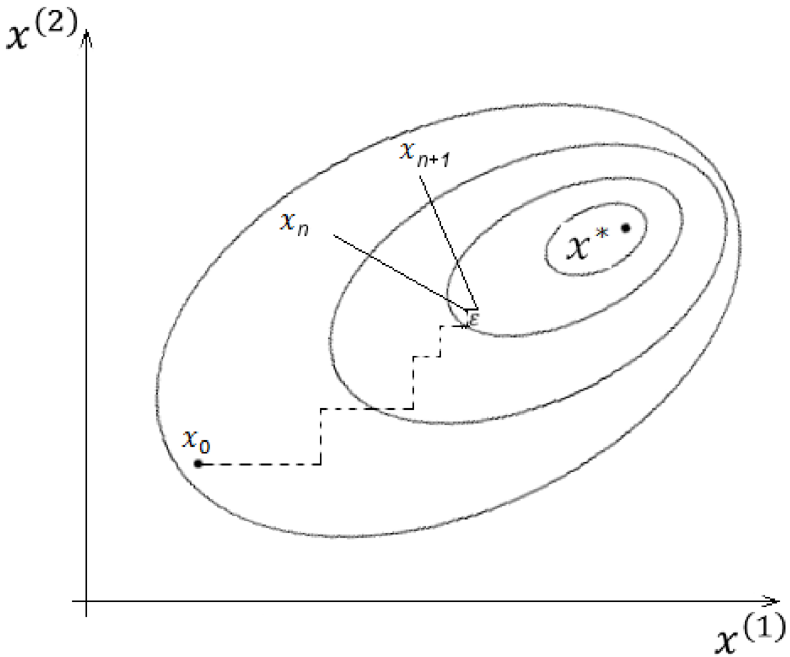
$\tau^* \to f(\tau^*) = \min_{\tau} f(\tau)$

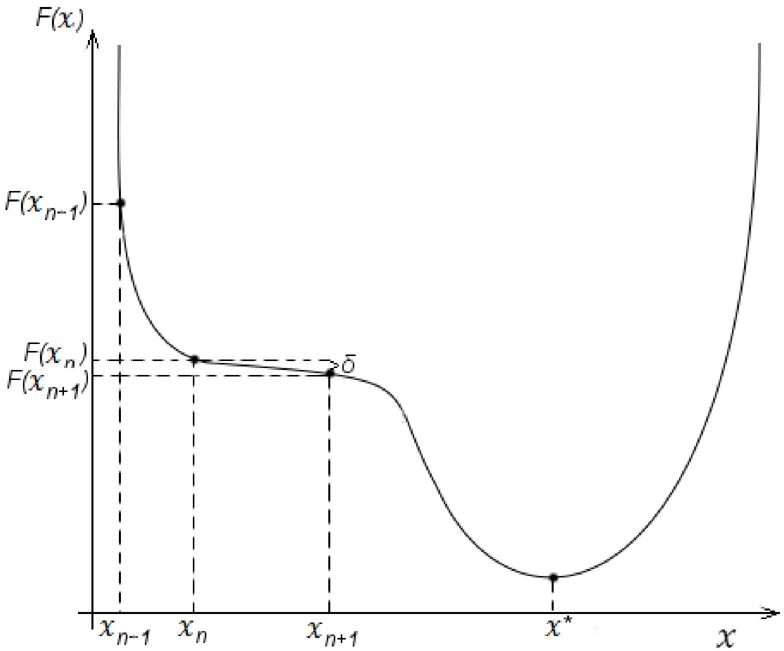
optymalizacja w kierunku ≡ optymalizacja funkcji jednej zmiennej

Warunki zatrzymania procedury

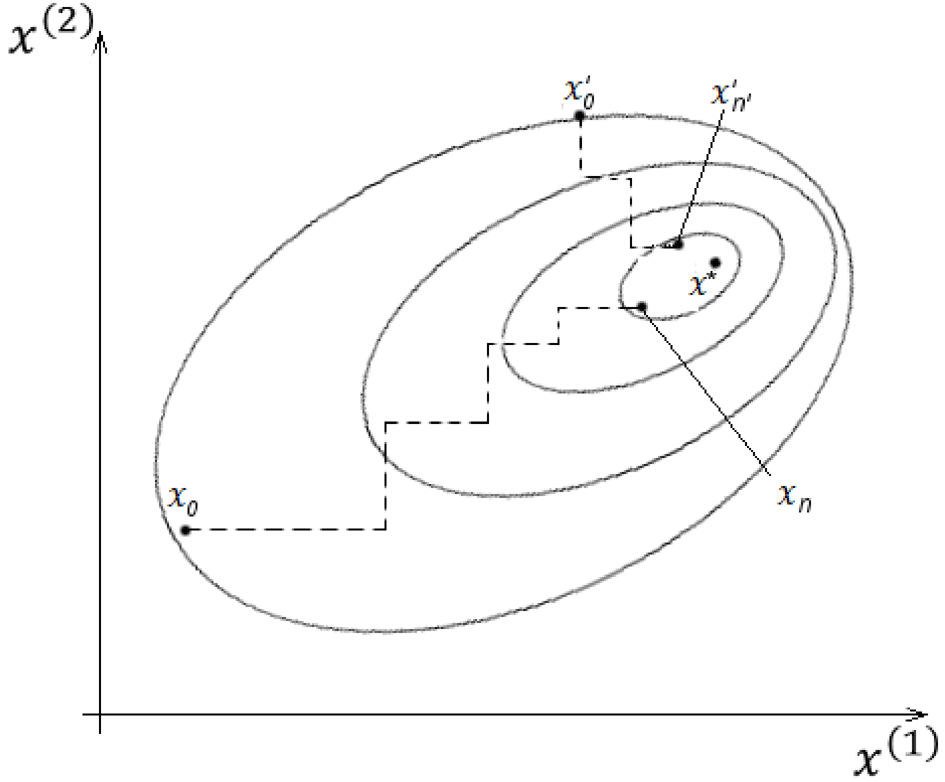
$$\|x_{n+1} - x_n\| < \varepsilon; \quad |F(x_{n+1}) - F(x_n)| < \delta; \quad \frac{|F(x_{n+1}) - F(x_n)|}{\|x_{n+1} - x_n\|} < \varrho$$

Uwaga!





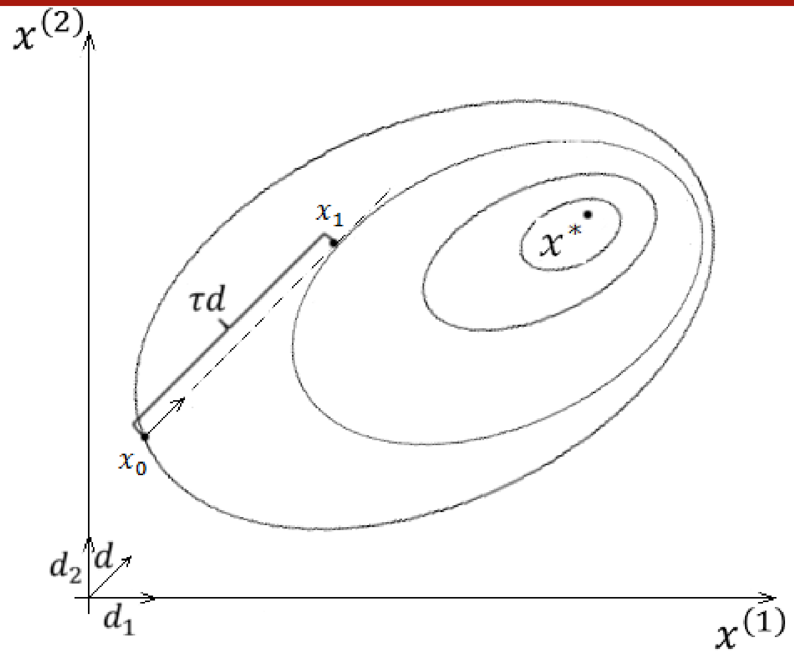
Dobra rada



$$\|x_n - x'_{n'}\| < \varepsilon$$

x_0, x'_0 - różne punkty początkowe
$x_n, x'_{n'}$ - odpowiednie punkty końcowe

Optymalizacja w kierunku

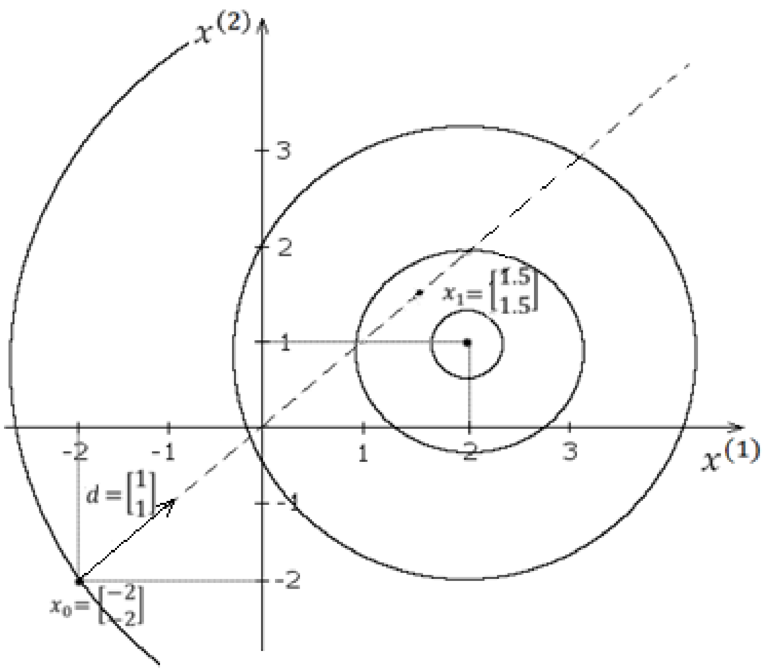


x_0 - punkt początkowy
x_1 - punkt końcowy
d - kierunek
τ - długość kroku w kierunku

$\tau^* \rightarrow F(x_0 + \tau^* d) = \min_{\tau} F(x_0 + \tau d)$
x_0, d – ustalone $F(x_0 + \tau d) \triangleq f(\tau)$
$f(\tau)$ – funkcja jednej zmiennej (długości kroku τ)
$\tau^* \rightarrow f(\tau^*) = \min_{\tau} f(\tau)$
optymalizacja w kierunku ≡ optymalizacja funkcji jednej zmiennej

Przykład

$$F(x) = \left(x^{(1)} - 2\right)^2 + \left(x^{(2)} - 1\right)^2,\ x_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$x_1 = x_0 + \tau d = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 1 * \tau \\ -2 + 1 * \tau \end{bmatrix}$$

$$F(x_0 + \tau d) = (-2 + \tau - 2)^2 + (-2 + \tau - 1)^2 = (\tau - 4)^2 + (\tau - 3)^2 = 2\tau^2 - 14\tau + 25 \triangleq f(\tau)$$

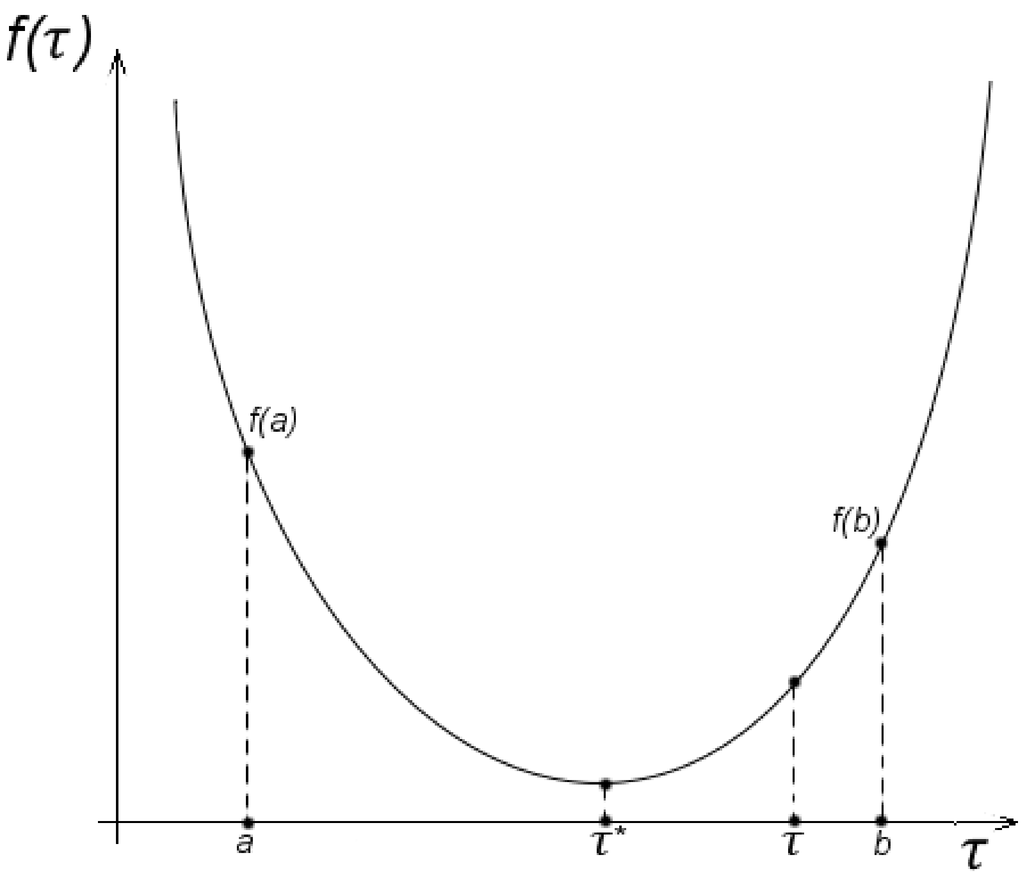
$$f'(\tau) = 4\tau^* - 14 = 0$$

$$\tau^* = 3.5$$

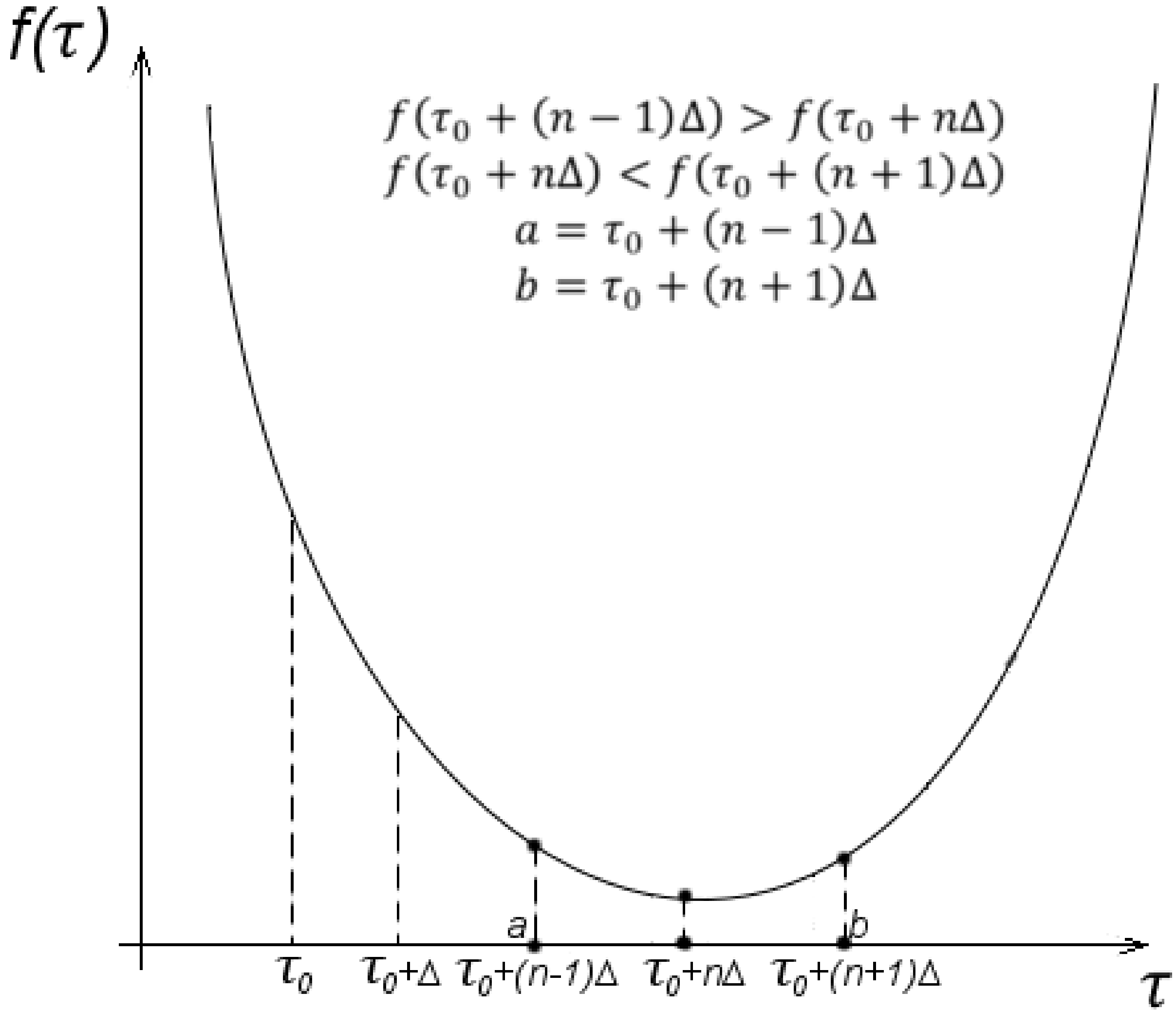
$$x_1 = x_0 + \tau^* d = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} + 3.5 * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

Metody zawężania odcinka

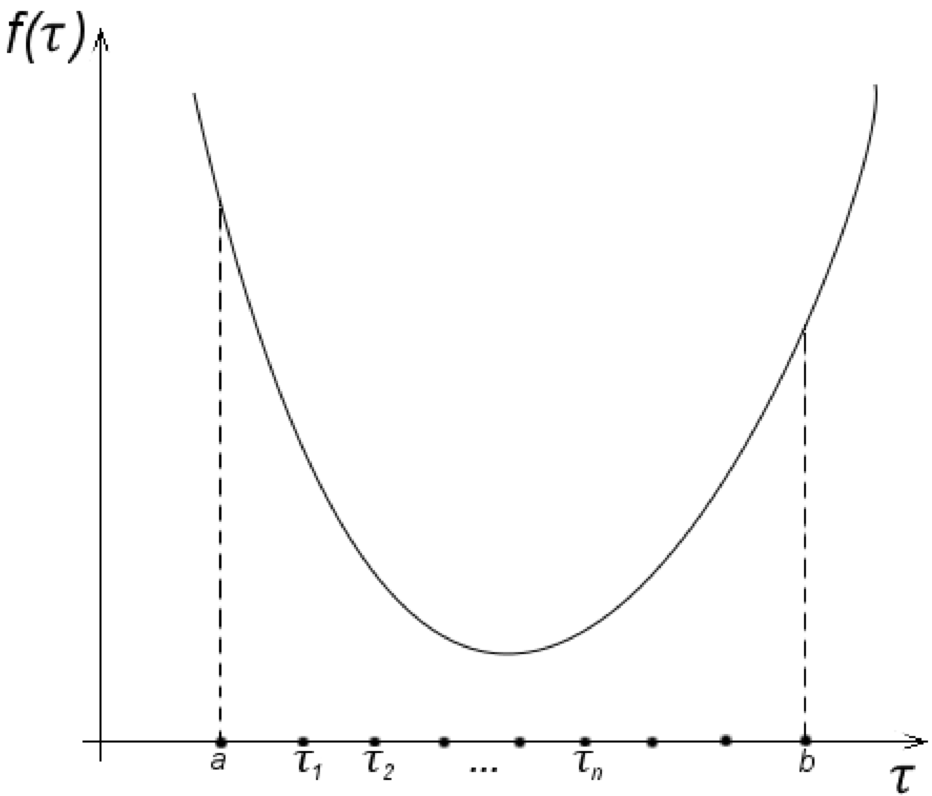
Założenie: $\tau^* \in [a, b]$



Spełnienie założenia $\tau \in [a, b]$



Podział równomierny

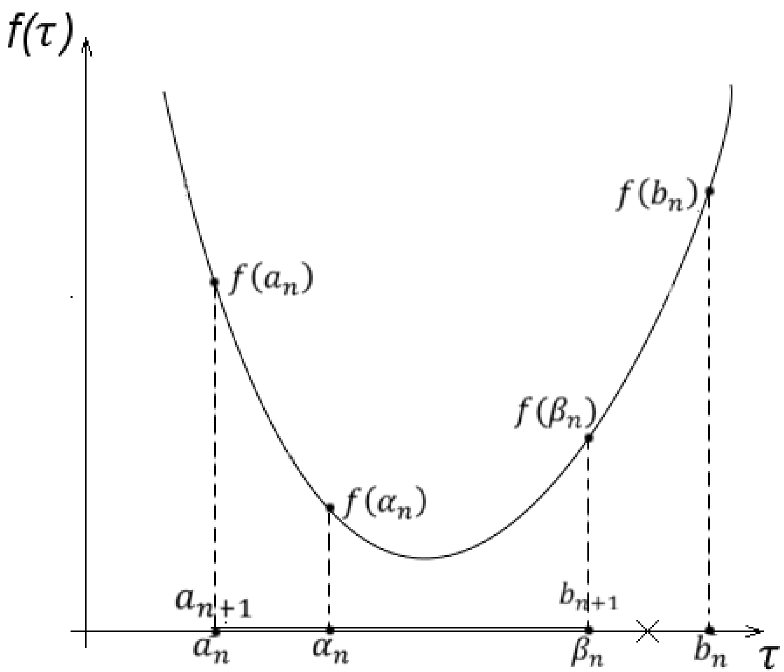


$N = \left[\frac{b-a}{\varepsilon}\right]$ - liczba wyliczeń wartości funkcji

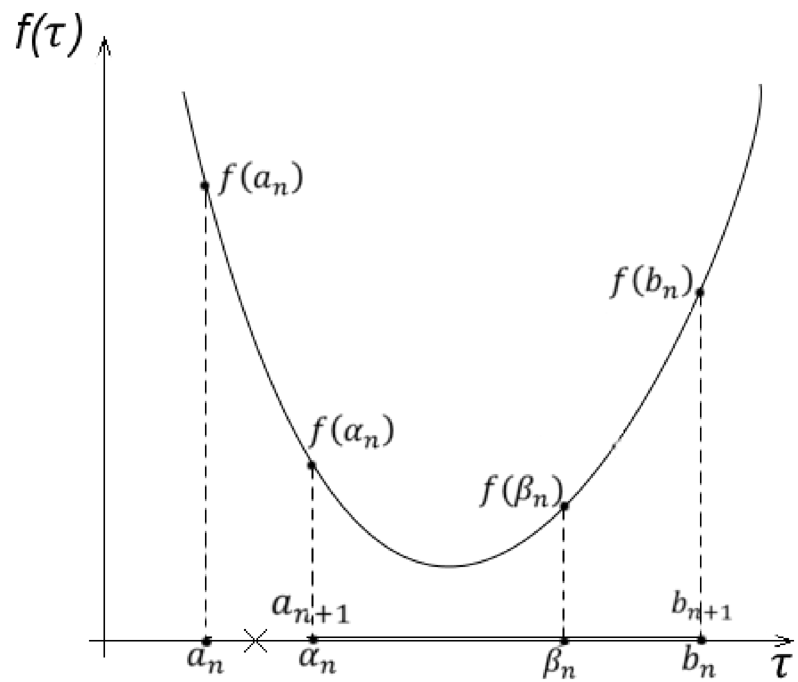
$$\tau_0 = a$$
$$\tau_n = \tau_0 + n\varepsilon$$
$$\tau^* \approx \tilde{\tau} \rightarrow f(\tilde{\tau}) = \min_{1 \leq n \leq N} \{f(\tau_n)\}$$

Zawężanie odcinka

$$f(\alpha_n) ? f(\beta_n)$$



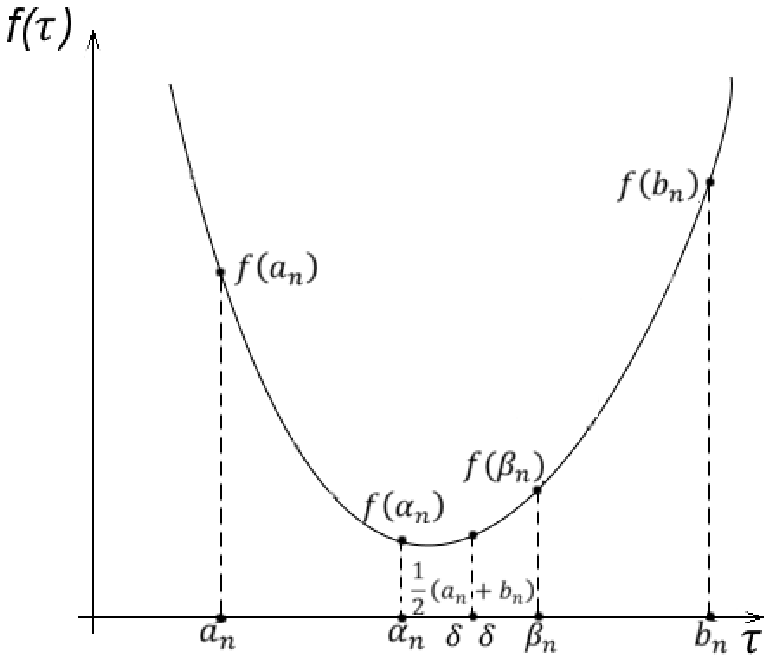
$$f(\alpha_n) \leq f(\beta_n)$$
$$a_{n+1} \coloneqq a_n$$
$$b_{n+1} \coloneqq \beta_n$$



$$f(\alpha_n) > f(\beta_n)$$
$$a_{n+1} \coloneqq \alpha_n$$
$$b_{n+1} \coloneqq b_n$$

Politechnika Wrocławska

Metoda podziału na połowę



$$\alpha_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - \delta$$

$$\beta_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) + \delta$$

$N = ?$

Dane: $a_0, b_0, \varepsilon, \delta$

Krok 0: $n = 0$

Krok 1: $\alpha_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - \delta$

$\beta_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) + \delta$

Krok 2: Jeśli $f(\alpha_n) \le f(\beta_n)$ to

$a_{n+1} \coloneqq a_n, b_{n+1} \coloneqq \beta_n,$

w przeciwnym razie

$a_{n+1} \coloneqq \alpha_n, b_{n+1} \coloneqq b_n.$

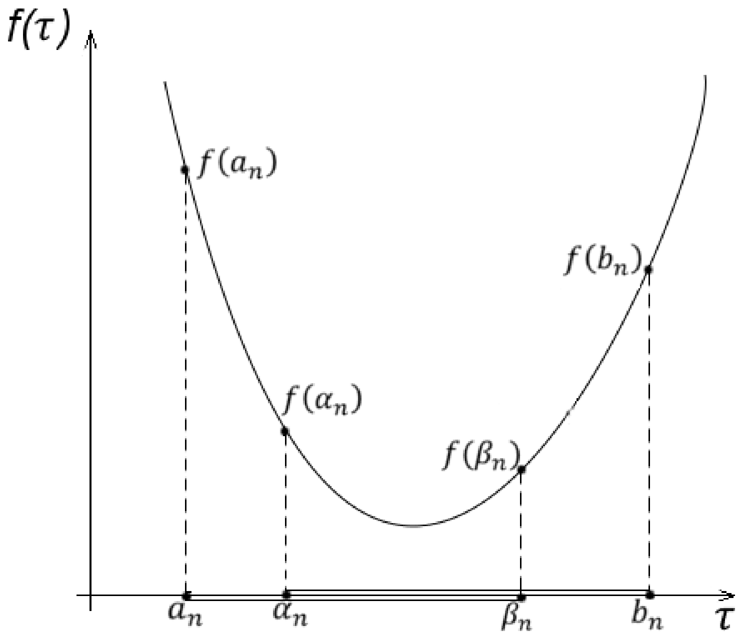
Krok 3: Jeśli $|b_{n+1} - a_{n+1}| \ge \varepsilon$ to

$n \coloneqq n + 1$, idź do kroku 1,

w przeciwnym razie

$\tilde{\tau} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n+1})$ (STOP)

Metoda γ podziału



$$\frac{b_n - \alpha_n}{b_n - a_n} = \frac{\beta_n - a_n}{b_n - a_n} = \gamma$$

$$\alpha_n = b_n + \gamma(a_n - b_n)$$

$$\beta_n = a_n + \gamma(b_n - a_n)$$

$N = ?$

Dane: $a_0, b_0, \varepsilon, \gamma$

Krok 0: $n = 0$

Krok 1: $\alpha_n = b_n + \gamma(a_n - b_n)$

$\beta_n = a_n + \gamma(b_n - a_n)$

Krok 2: Jeśli $f(\alpha_n) \le f(\beta_n)$ to

$a_{n+1} \coloneqq a_n, b_{n+1} \coloneqq \beta_n$,

w przeciwnym razie

$a_{n+1} \coloneqq \alpha_n, b_{n+1} \coloneqq b_n$.

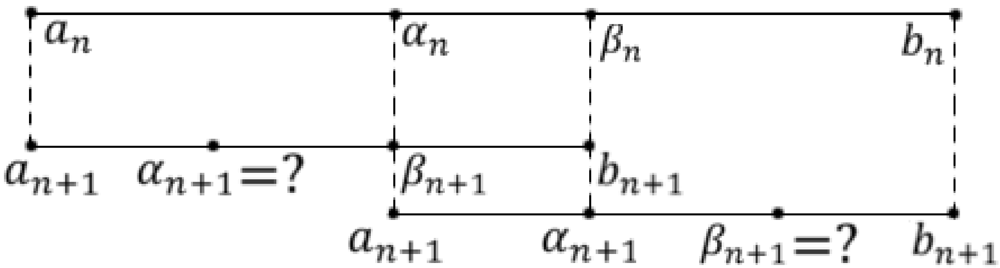
Krok 3: Jeśli $|b_{n+1} - a_{n+1}| \ge \varepsilon$ to

$n \coloneqq n + 1$, idź do kroku 1,

w przeciwnym razie

$\tilde{\tau} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - b_{n+1})$ (STOP)

Metoda złotego podziału



$$\gamma^2 + \gamma - 1 = 0$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

1. $\frac{\beta_{n+1}-a_{n+1}}{b_{n+1}-a_{n+1}} = \gamma$, czyli

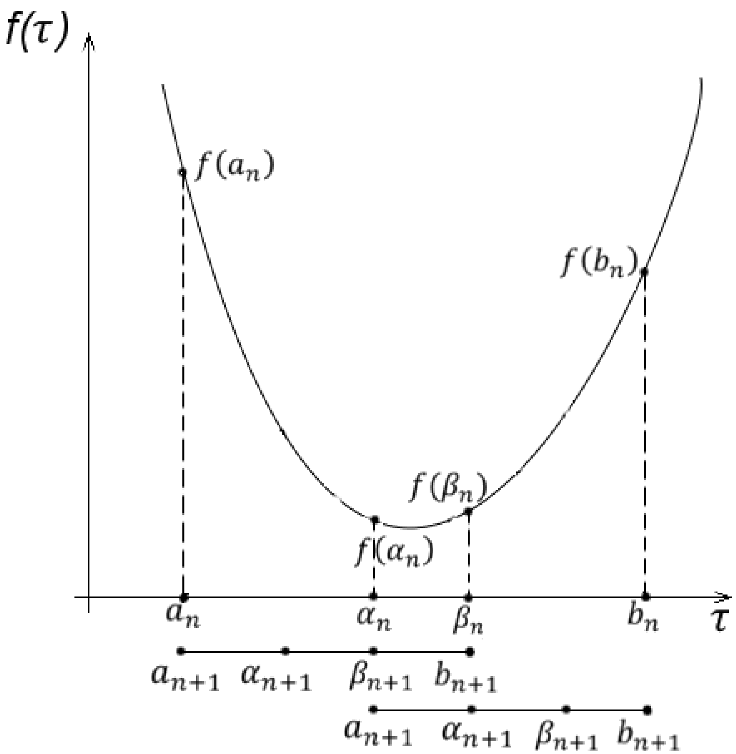
$$\frac{\alpha_n - a_n}{\beta_n - a_n} = \frac{b_n + \gamma(a_n - b_n) - a_n}{a_n + \gamma(b_n - a_n) - a_n} = \frac{b_n - a_n + \gamma(a_n - b_n)}{\gamma(b_n - a_n)} = \frac{1}{\gamma} - 1 = \gamma$$

2. $\frac{b_{n+1}-\alpha_{n+1}}{b_{n+1}-a_{n+1}} = \gamma$, czyli

$$\frac{b_n - \beta_n}{b_n - a_n} = \frac{b_n - a_n + \gamma(b_n - a_n)}{b_n - b_n - \gamma(b_n - a_n)} = \frac{b_n - a_n + \gamma(b_n - a_n)}{\gamma(b_n - a_n)} = \frac{1}{\gamma} - 1 = \gamma$$

Politechnika Wrocławska

Metoda złotego podziału c.d.



$$\gamma^2 + \gamma - 1 = 0$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618$$

$$N = ?$$

Dane: $a_0, b_0, \varepsilon, \gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Krok 0: $n = 0$

$\alpha_0 = b_0 + \gamma(a_0 - b_0)$

$\beta_0 = a_0 + \gamma(b_0 - a_0)$

Krok 1: Jeśli $|b_n - a_n| < \varepsilon$, to

$\tilde{\tau} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$(STOP)

w przeciwnym razie → krok 2

Krok 2: Jeśli $f(\alpha_n) \leq f(\beta_n)$ to

$a_{n+1} := a_n, b_{n+1} := \beta_n,$

$\beta_{n+1} := \alpha_n,$

$\alpha_{n+1} := \beta_n + \gamma(a_n - b_n)$

$n := n + 1$, idź do kroku 1

w przeciwnym razie

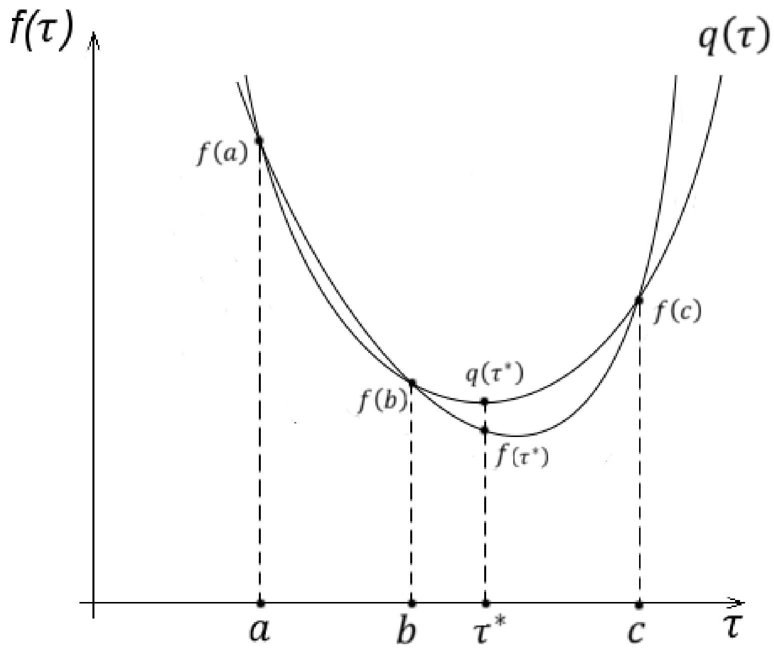
$a_{n+1} := \alpha_n, b_{n+1} := b_n,$

$\alpha_{n+1} := \beta_n,$

$\beta_{n+1} := \alpha_n + \gamma(b_n - \alpha_n)$

$n := n + 1$, idź do kroku 1

Metoda aproksymacji kwadratowej



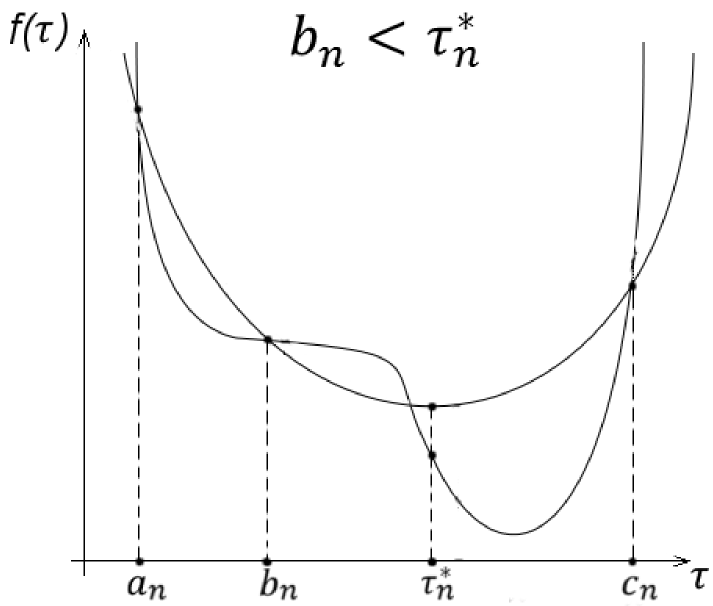
$$a < b < c$$
$$f(a) \geq f(b)$$
$$f(b) \leq f(c)$$

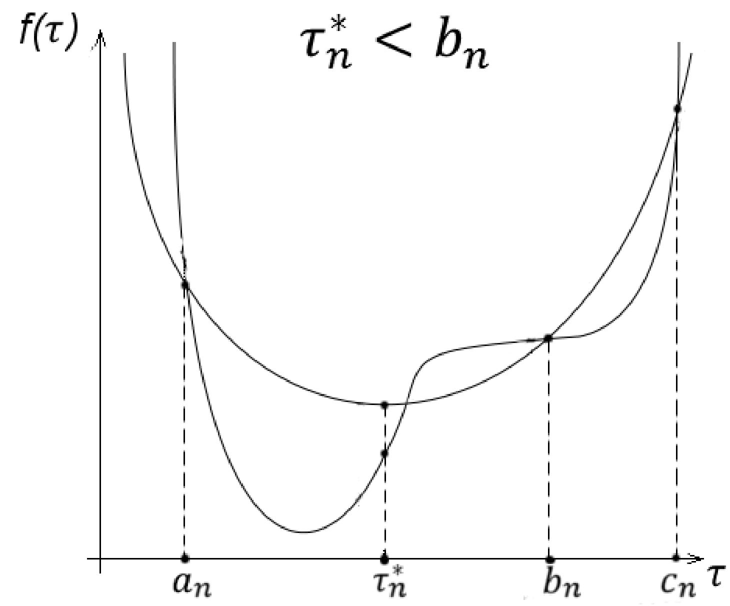
$q(\tau)$ – aproksymacja kwadratowa
τ^* - minimum funkcji $q(\tau)$

$$q(\tau) = \frac{f(a)(\tau - b)(\tau - c)}{(a - b)(a - c)} + \frac{f(b)(\tau - a)(\tau - c)}{(b - a)(b - c)} + \frac{f(c)(\tau - a)(\tau - b)}{(c - a)(b - c)}$$

$$\tau^* = \frac{1}{2}\frac{f(a)(b^2 - c^2) + f(b)(c^2 - a^2) + f(c)(a^2 - b^2)}{f(a)(b - c) + f(b)(c - a) + f(c)(a - b)}$$

Metoda aproksymacji kwadratowej





$$f(b_n) \geq f(\tau_n^*) \quad a_{n+1} \coloneqq b_n \quad b_{n+1} \coloneqq \tau_n^* \quad c_{n+1} \coloneqq c_n$$

$$f(b_n) < f(\tau_n^*) \quad a_{n+1} \coloneqq a_n \quad b_{n+1} \coloneqq b_n \quad c_{n+1} \coloneqq \tau_n^*$$

$$f(b_n) \geq f(\tau_n^*) \quad a_{n+1} \coloneqq a_n \quad b_{n+1} \coloneqq \tau_n^* \quad c_{n+1} \coloneqq b_n$$

$$f(b_n) \geq f(\tau_n^*) \quad a_{n+1} \coloneqq \tau_n^* \quad b_{n+1} \coloneqq b_n \quad c_{n+1} \coloneqq c_n$$

$$|c_{n+1} - a_{n+1}| < \varepsilon \qquad \tilde{\tau} = \tau_{n+1}^*$$

Metoda aproksymacji kwadratowej

Dane: $a_0, b_0, c_0, \varepsilon$

Krok 0: $n = 0$

Krok 1: $\tau_n = \frac{1}{2}\frac{f(a_n)\left(b_n^2-c_n^2\right)+f(b_n)\left(c_n^2-a_n^2\right)+f(c_n)(a_n^2-b_n^2)}{f(a_n)(b_n-c_n)+f(b_n)(c_n-a_n)+f(c_n)(a_n-b_n)}$

Krok 2: Jeśli $b_n < \tau_n$ to idź do kroku 3

w przeciwnym razie

Jeśli $f(b_n) \geq f(\tau_n)$ to $a_{n+1} \coloneqq a_n, b_{n+1} \coloneqq \tau_n, c_{n+1} \coloneqq b_n$ idź do kroku 4

w przeciwnym razie $a_{n+1} \coloneqq \tau_n, b_{n+1} \coloneqq b_n, c_{n+1} \coloneqq c_n$ idź do kroku 4

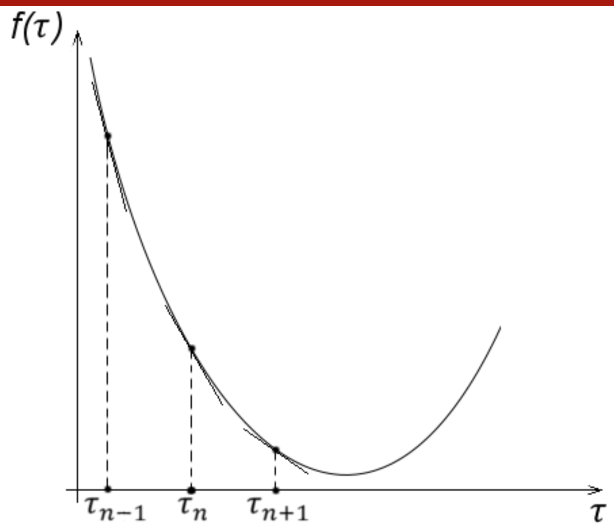
Krok 3: Jeśli $f(b_n) \geq f(\tau_n)$ to $a_{n+1} \coloneqq b_n, b_{n+1} \coloneqq \tau_n, c_{n+1} \coloneqq c_n$ idź do kroku 4

w przeciwnym razie $a_{n+1} \coloneqq a_n, b_{n+1} \coloneqq b_n, c_{n+1} \coloneqq \tau_n$ idź do kroku 4

Krok 4: Jeśli $|c_{n+1} - a_{n+1}| \geq \varepsilon$ to $n \coloneqq n + 1$ idź do kroku 1

w przeciwnym razie $\tilde{\tau} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + c_{n+1})$ (STOP)

Metoda pierwszej pochodnej



$$\tau_{n+1} = \tau_n - \gamma_n f'(t_n) \qquad \gamma_n > 0, \tau_0$$
$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \infty$$

np. $|\tau_{n+1} - \tau_n| < \varepsilon$ (STOP)

$$\tau_0$$
$$\tau_1 = \tau_0 - \gamma_0 f'(\tau_0)$$
$$\tau_2 = \tau_1 - \gamma_1 f'(\tau_1) = \tau_0 - \gamma_0 f'(\tau_0) - \gamma_1 f'(\tau_1)$$
$$\tau_{n+1} = \tau_n - \gamma_n f'(\tau_n) = \cdots = \tau_0 - \gamma_0 f'(\tau_0) - \gamma_1 f'(\tau_1) - \cdots - \gamma_n f'(\tau_n)$$
$$|\tau_{n+1} - \tau_0| = |\sum_{k=0}^{n} \gamma_k f'(\tau_k)| \le \sum_{k=0}^{n} \gamma_k |f'(\tau_k)| \le \max_{0<k<n} |f'(\tau_k)| \sum_{k=0}^{n} \gamma_k$$
$$|\tau_\infty - \tau_0| \le \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty$$

Metoda znaku pierwszej pochodnej

$\tau_{n+1} = \tau_n - \vartheta_n sign[f'(\tau_n)]$

$\gamma_n f'(\tau_n) = \gamma_n |f'(\tau_n)| * sign\ f'(\tau_n) = \vartheta_n\ sign[f'(\tau_n)]$, gdzie $\vartheta_n = \gamma_n |f'(\tau_n)|$

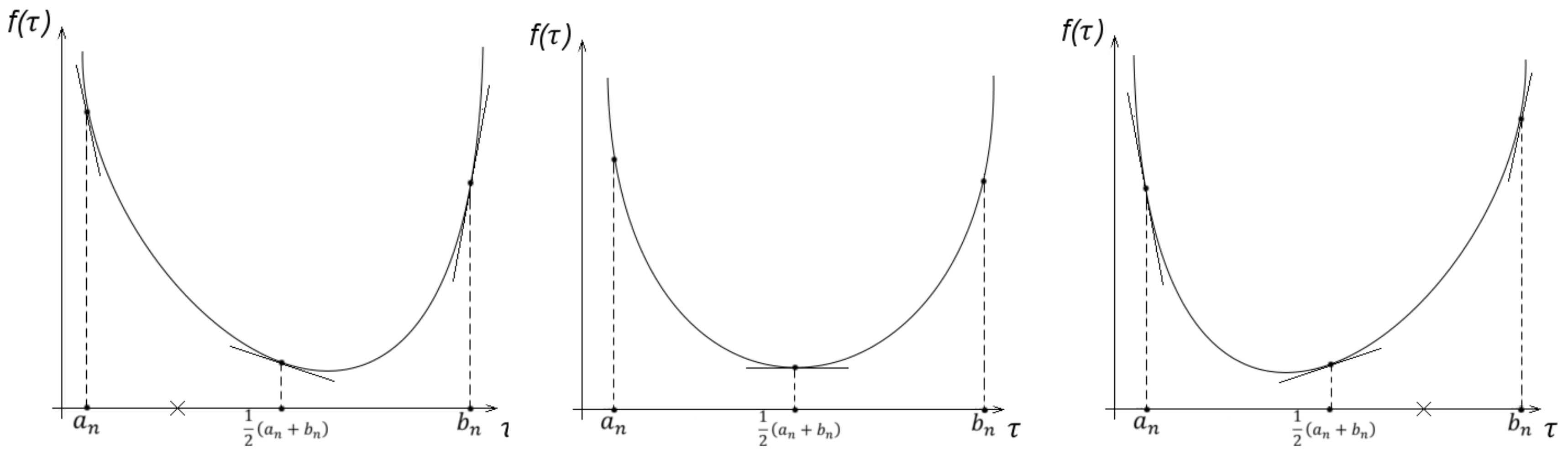
$\vartheta_n > 0$

$\lim_{n\to\infty} \vartheta_n = 0$, bo $\lim_{n\to\infty} |f'(\tau_n)| = 0$, $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma$

$\sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n = \infty$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \vartheta_n = \lim_{n\to\infty} \gamma_n |f'(\tau_n)| = 0$

Metoda Bolzano

$$sign\ a_n \neq sign\ b_n$$

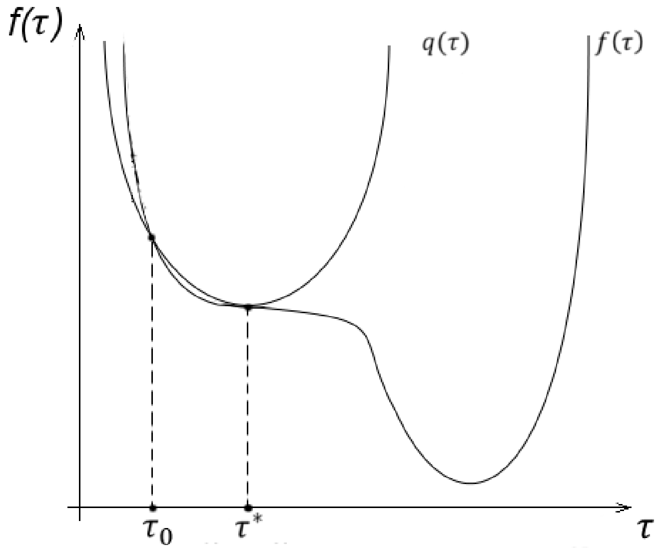


$$sign\ a_n = sign(\frac{1}{2}(a_n + b_n))$$
$$a_{n+1} \coloneqq \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$
$$b_{n+1} \coloneqq b_n$$

$$f'\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right) = 0$$
$$\tilde{\tau} \coloneqq \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$
(rzadko)

$$sign\ b_n = sign(\frac{1}{2}(a_n + b_n))$$
$$a_{n+1} \coloneqq a_n$$
$$b_{n+1} \coloneqq \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

Metoda drugiej pochodnej



τ_0

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \frac{f'(\tau_n)}{f''(\tau_n)}$$

$|\tau_{n+1} - \tau_n| < \varepsilon$ (STOP)

$$f(\tau) = \underbrace{f(\tau_0) + (\tau - \tau_0)f'(\tau_0) + \frac{1}{2}(\tau - \tau_0)^2 f''(\tau_0)}_{q(\tau)} + 0_3(|\tau - \tau_0|)$$

$$q'(\tau) = f'(\tau_0) + (\tau^* - \tau_0)f''(\tau_0) = 0$$

$$\tau^* = \tau_0 - \frac{f'(\tau_0)}{f''(\tau_0)}$$