

Metody Analizy Systemowej we Wspomaganiu Decyzji



Wykład 16. Optymalizacja wieloetapowa – programowanie dynamiczne

Optymalizacja wieloetapowa



Optymalizacja wieloetapowa

$$x_1^*, x_2^*, \dots, x_S^* \rightarrow F(x_1^*, x_2^*, \dots, x_S^*) = \min_{x_1, x_2, \dots, x_S \in D_x} F(x_1, x_2, \dots, x_S)$$

$$D_x = (x_1, x_2, \dots, x_S)$$

$$\left\{ \begin{aligned} [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_S]^T \in \mathbb{R}^S : \varphi_l(x_1, x_2, \dots, x_S) = 0, l = 1, 2, \dots, L, \\ \psi_m(x_1, x_2, \dots, x_S) \leq 0, m = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \right\}$$

Powyższe zadanie można rozwiązać krok po kroku optymalizując po jednej zmiennej i uzależniając od pozostałych.

Przyjmijmy oznaczenia:

$$F \equiv F_S, \quad \varphi_l \equiv \varphi_{lS}, l = 1, 2, \dots, L, \quad \psi_m = \psi_{mS}, m = 1, 2, \dots, M \quad D_x \equiv D_{x_S}$$

Optymalizacja wieloetapowa

Krok 1.

$$x_S^* = G_S(x_1, \dots, x_{S-1}) \rightarrow F_S(x_1, x_2, \dots, x_S^*) = \min_{x_S \in D_{xS}} F_S(x_1, x_2, \dots, x_S)$$

Wartość funkcji celu w punkcie optymalnym:

$$F_{S-1}(x_1, x_2, \dots, x_{S-1}) \stackrel{\Delta}{=} F_S(x_1, x_2, \dots, x_S^*) = F_S(x_1, x_2, \dots, G_S(x_1, \dots, x_{S-1}))$$

Ograniczenia w punkcie optymalnym:

$$D_{x_{S-1}}(x_1, \dots, x_{S-1}) \stackrel{\Delta}{=} D_{x_S}(x_1, \dots, x_{S-1}, x_S^* = G_S(x_1, \dots, x_{S-1})) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{S-1}]^T \in \mathbb{R}^{S-1} : \\ \varphi_{lS}(x_1, x_2, \dots, G_S(x_1, \dots, x_{S-1})) = \varphi_{lS-1}(x_1, x_2, \dots, x_{S-1}) = 0, \ l = 1, 2, \dots, L, \\ \psi_{mS}(x_1, x_2, \dots, G_S(x_1, \dots, x_{S-1})) = \psi_{mS-1}(x_1, x_2, \dots, x_{S-1}) \leq 0, \ m = 1, 2, \dots, M \end{array} \right\}$$

Optymalizacja wieloetapowa

Krok 2.

$$x_{S-1}^* = G_{S-1}(x_1, \dots, x_{S-2}) \rightarrow F_{S-1}(x_1, x_2, \dots, x_{S-1}^*) = \min_{x_{S-1} \in D_{x_{S-1}}} F_{S-1}(x_1, x_2, \dots, x_{S-1})$$

Wartość funkcji celu w punkcie optymalnym:

$$F_{S-2}(x_1, x_2, \dots, x_{S-2}) \stackrel{\Delta}{=} F_{S-1}(x_1, x_2, \dots, x_{S-1}^*) = F_{S-1}(x_1, x_2, \dots, G_{S-1}(x_1, \dots, x_{S-2}))$$

Ograniczenia w punkcie optymalnym:

$$D_{x_{S-2}}(x_1, \dots, x_{S-2}) \stackrel{\Delta}{=} D_{x_{S-1}}(x_1, \dots, x_{S-2}, x_{S-1}^* = G_{S-1}(x_1, \dots, x_{S-2})) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_{S-2}]^T \in \mathbb{R}^{S-2} : \\ \varphi_{lS-1}(x_1, x_2, \dots, G_{S-1}(x_1, \dots, x_{S-2})) = \varphi_{lS-2}(x_1, x_2, \dots, x_{S-2}) = 0, \ l = 1, 2, \dots, L, \\ \psi_{mS-1}(x_1, x_2, \dots, G_{S-1}(x_1, \dots, x_{S-2})) = \psi_{mS-2}(x_1, x_2, \dots, x_{S-2}) \leq 0, \ m = 1, 2, \dots, M \end{array} \right\}$$

⋮

Optymalizacja wieloetapowa

⋮

Krok S-1.

$$x_2^* = G_2(x_1) \rightarrow F_2(x_1, x_2^*) = \min_{x_2 \in D_{x_2}} F_2(x_1, x_2)$$

Wartość funkcji celu w punkcie optymalnym:

$$F_1(x_1) \stackrel{\Delta}{=} F_2(x_1, x_2^*) = F_2(x_1, G_2(x_1))$$

Ograniczenia w punkcie optymalnym:

$$D_{x_1}(x_1) \stackrel{\Delta}{=} D_{x_{S-1}}(x_1, x_2^* = G_1(x_1)) = \left\{ \begin{array}{l} x_1 \in \mathbf{R} : \\ \varphi_{l2}(x_1, G_1(x_1)) = \varphi_{l1}(x_1) = 0, l = 1, 2, \dots, L, \\ \psi_{m2}(x_1, G_{S-1}(x_1)) = \psi_{m1}(x_1) \leq 0, m = 1, 2, \dots, M \end{array} \right\}$$

Optymalizacja wieloetapowa

Krok S.

$$x_1^* \rightarrow F_1(x_1^*) = \min_{x_1 \in D_{x_1}} F_1(x_1)$$

Teraz możemy powrócić do zależności „G” wyznaczonych w poprzednich krokach

$$x_1^*$$

$$x_2^* = G_2(x_1^*)$$

⋮

$$x_{S-1}^* = G_{S-1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{S-1}^*)$$

$$x_S^* = G_S(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{S-1}^*)$$

Optymalizacja wieloetapowa

Przykład:

$$F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = F_2(x_1, x_2)$$

Krok 1.

$$x_2^* = G_2(x_1) \rightarrow F_2(x_1, x_2^*) = \min_{x_2} \{ x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \}$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} F_2(x_1, x_2^*) = 2x_1 + x_2^* = 0 \Rightarrow x_2^* = -\frac{1}{2}x_1 = G_2(x_1)$$

$$F_1(x_1) \stackrel{\Delta}{=} F(x_1, x_2^*) = F(x_1, G_2(x_1)) = (x_1)^2 + x_1 \left(-\frac{1}{2}x_1 \right) + \left(-\frac{1}{2}x_1 \right)^2$$

$$F_1(x_1) = \frac{3}{4}x_1^2$$

Optymalizacja wieloetapowa

Krok 2.

$$x_1^* \Rightarrow F_1(x_1) = \min_{x_1} \left\{ \frac{3}{4} x_1^2 \right\}$$

$$\frac{d}{dx_1} F_1(x_1) = 2 \frac{3}{4} x_1 = 0 \Rightarrow x_1^* = 0$$

Teraz wracamy:

$$x_1^* = 0$$

$$x_2^* = G_2(x_1^*) = -\frac{1}{2} x_1^* = 0$$

Programowanie dynamiczne

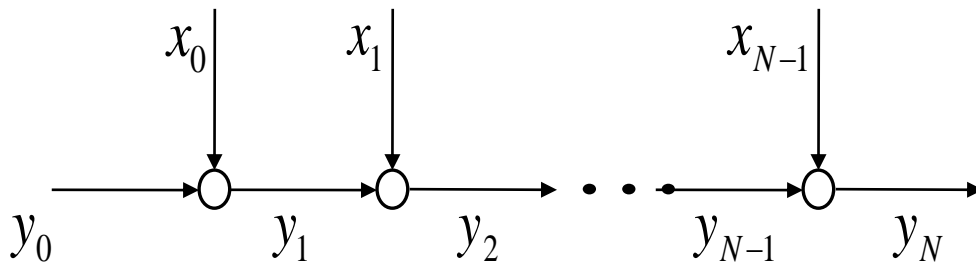
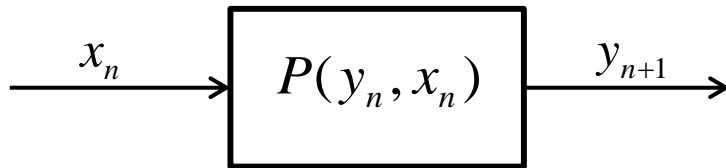


Programowanie dynamiczne

Proces dynamiczny: $y_{n+1} = P(y_n, x_n)$, y_0 n - takt $n = 1, 2, \dots, N$

x_n - decyzja w n - tym takcie

y_n - stan procesu w n - tym takcie



Zadanie decyzyjne: znaleźć ciąg decyzji: $x_0^*, x_1^*, \dots, x_{N-1}^*$,

Po co? Po N krokach zamierzamy coś osiągnąć np.: $y_N = y^*$ - zadany stan,

Przy czym wskaźnik $Q(x_0, \dots, x_{N-1}, y_1, \dots, y_N)$ przyjmuje wartość minimalną.

Programowanie dynamiczne

Określmy przykładowe oceny ciągu decyzji oraz efektów decyzji

$$Q(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, y_1, y_2, \dots, y_N)$$

Np.:

$$Q(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, y_1, y_2, \dots, y_N) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n^2, \quad y_N = y^*$$

$$Q(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, y_1, y_2, \dots, y_N) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n^2, \quad \underline{y} \leq y_N \leq \bar{y}$$

$$Q(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, y_1, y_2, \dots, y_N) = \sum_{n=1}^{N-1} (y_n - y_n^*), \quad 0 \leq x_n \leq \bar{x}$$

$$Q(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, y_1, y_2, \dots, y_N) = \sum_{n=0}^{N-1} A_{n+1}(x_n, y_{n+1}), \quad \text{przy ograniczeniach } x_n \text{ i } y_n$$

Programowanie dynamiczne

Można postąpić w następujący sposób:

$$y_0$$

$$y_1 = P(y_0, x_0)$$

$$y_2 = P(y_1, x_1) = P(P(y_0, x_0), x_1) \stackrel{\Delta}{=} P_1(y_0, x_0, x_1)$$

⋮

$$y_N = P(y_{N-1}, x_{N-1}) = P(P(y_{N-2}, x_{N-2}), x_{N-1}) = \dots \stackrel{y_{n+1}=P(y_n, x_n)}{=} P_{N-1}(y_0, x_0, x_1, \dots, x_N)$$

Po podstawieniu do $Q(\cdot)$ otrzymujemy:

$$Q(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, y_1, y_2, \dots, y_N) = \sum_{n=0}^{N-1} A_{n+1}(x_n, y_{n+1}) \stackrel{\Delta}{=} F(y_0, x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$$

Programowanie dynamiczne

Ponieważ:

$$Q(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, y_1, y_2, \dots, y_N) = \sum_{n=0}^{N-1} A_{n+1}(x_n, y_{n+1}) \stackrel{\Delta}{=} F(y_0, x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$$

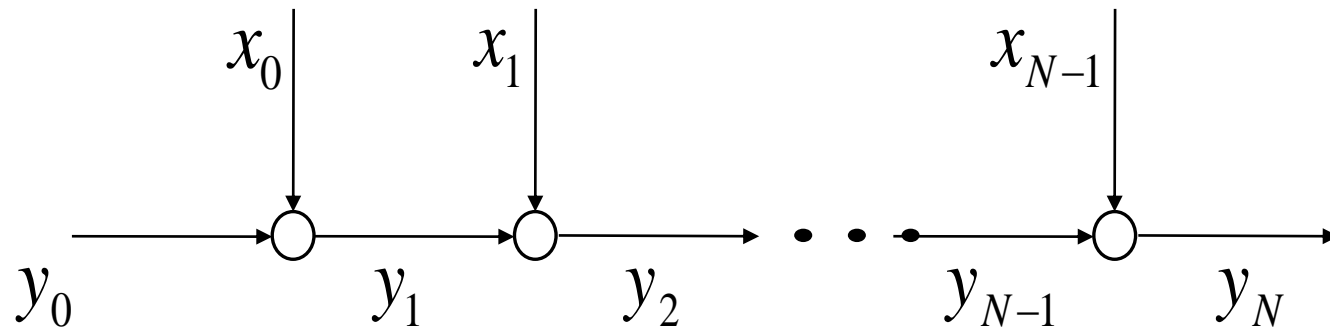
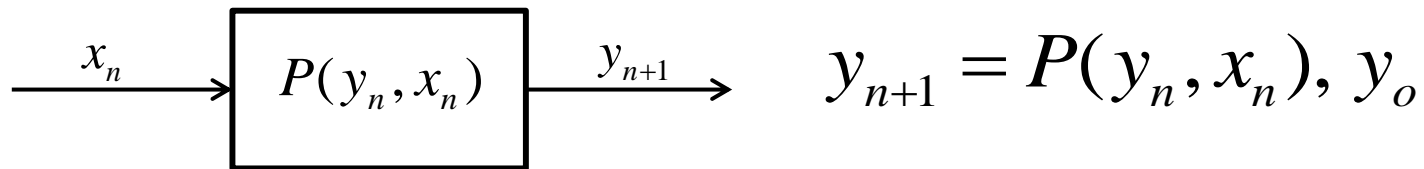
Zadanie optymalizacji:

$$x_0^*, x_1^*, \dots, x_{N-1}^* \rightarrow Q(x_0^*, x_1^*, \dots, x_{N-1}^*, y_1, y_2, \dots, y_N) = \min_{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}} Q(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, y_1, y_2, \dots, y_N)$$

Jest równoważne zadaniu:

$$x_0^*, x_1^*, \dots, x_{N-1}^* \rightarrow F(y_0, x_0^*, x_1^*, \dots, x_{N-1}^*) = \min_{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}} F(y_0, x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$$

Do rozwiązania tego zadania można zastosować podejście wieloetapowe.



$$Q(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, y_1, y_2, \dots, y_N) = \sum_{n=0}^{N-1} A_{n+1}(x_n, y_{n+1}) \stackrel{\Delta}{=} F(y_0, x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$$

Programowanie dynamiczne

$$Q(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, y_1, y_2, \dots, y_N) = \sum_{n=0}^{N-1} A_{n+1}(x_n, y_{n+1}) \stackrel{\Delta}{=} F(y_0, x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$$

Uwaga:

Ostatni stan y_N zależy od decyzji x_{N-1} oraz stanu y_{N-1} , który zależy od poprzednich decyzji x_0, x_1, \dots, x_{N-2} .

Poprzedni stan y_{N-1} zależy od decyzji x_{N-2} oraz stanu y_{N-2} , który zależy od poprzednich decyzji x_0, x_1, \dots, x_{N-3} .

⋮

Stan y_2 zależy od decyzji x_1 oraz stanu y_1 , który zależy od poprzednich decyzji x_0, x_1 .

Stan y_1 zależy od decyzji x_0 oraz stanu y_0 , który to wartości są znane.

Do rozwiązania zadania optymalizacji powyższej funkcji można zastosować podejście wieloetapowe. Ze względu na specyficzną postać kryterium (suma funkcji decyzji x_n oraz stanu y_{n+1} w kolejnych taktach. Optymalizując kolejno od ostatniego składnika uzależniamy rozwiązanie od poprzedniego stanu i poprzednich decyzji.

Programowanie dynamiczne

$$Q(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, y_1, y_2, \dots, y_N) = \sum_{n=0}^{N-1} A_{n+1}(x_n, y_{n+1})$$

Krok 1. $x_{N-1}^* \rightarrow \min_{x_{N-1}} A_N(x_{N-1}, y_N)$

Wiemy że: $y_N = P(y_{N-1}, x_{N-1})$

$$x_{N-1}^* = G_{N-1}(y_{N-1}) \rightarrow \min_{x_{N-1}} A_N(x_{N-1}, P(y_{N-1}, x_{N-1}))$$

$$V_{N-1}(y_{N-1}) \stackrel{\Delta}{=} \min_{x_{N-1}} A_N(x_{N-1}, P(y_{N-1}, x_{N-1})) =$$

$$= A_N(x_{N-1}^*, P(y_{N-1}, x_{N-1}^*)) = A_N(G_{N-1}(y_{N-1}), P(y_{N-1}, G_{N-1}(y_{N-1})))$$

Programowanie dynamiczne

Krok 2. $x_{N-2}^* \rightarrow \min_{x_{N-2}} \{A_{N-1}(x_{N-2}, y_{N-1}) + V_{N-1}(y_{N-1})\}$

Wiemy że: $y_{N-1} = P(y_{N-2}, x_{N-2})$

$$x_{N-2}^* = G_{N-2}(y_{N-2}) \rightarrow \min_{x_{N-2}} \{A_{N-1}(x_{N-2}, P(y_{N-2}, x_{N-2})) + V_{N-1}(P(y_{N-2}, x_{N-2}))\}$$

$$\begin{aligned} V_{N-2}(y_{N-2}) &\stackrel{\Delta}{=} \min_{x_{N-2}} \{A_{N-1}(x_{N-2}, P(y_{N-2}, x_{N-2})) + V_{N-1}(P(y_{N-2}, x_{N-2}))\} = \\ &= \{A_{N-1}(x_{N-2}^*, P(y_{N-2}, x_{N-2}^*)) + V_{N-1}(P(y_{N-2}, x_{N-2}^*))\} = \\ &= A_{N-1}(G_{N-2}(y_{N-2}), P(y_{N-2}, G_{N-2}(y_{N-2}))) + V_{N-1}(P(y_{N-2}, G_{N-2}(y_{N-2}))) \end{aligned}$$

⋮

Programowanie dynamiczne

Krok N-1.

$$x_1^* \rightarrow \min_{x_1} \{A_2(x_1, y_2) + V_2(y_2)\}$$

Wiemy że:

$$y_2 = P(y_1, x_1)$$

$$x_1^* = G_1(y_1) \rightarrow \min_{x_1} \{A_2(x_1, P(y_1, x_1)) + V_2(P(y_1, x_1))\}$$

$$V_1(y_1) \stackrel{\Delta}{=} \min_{x_1} \{A_2(x_1, P(y_1, x_1)) + V_2(P(y_1, x_1))\} =$$

$$= A_2(x_1^*, P(y_1, x_1^*)) + V_2(P(y_1, x_1^*))$$

$$= A_2(G_1(y_1), P(y_1, G_1(y_1))) + V_2(P(y_1, G_1(y_1)))$$

Programowanie dynamiczne

Krok N.

$$x_0^* \rightarrow \min_{x_0} \{A_1(x_0, y_1) + V_1(y_1)\}$$

Wiemy że:

$$y_1 = P(y_0, x_0)$$

$$x_0^* = G_0(y_0) \rightarrow \min_{x_0} \{A_1(x_0, P(y_0, x_0)) + V_1(P(y_0, x_0))\}$$

y_0 jest znaną wartością i teraz możemy wyliczyć kolejne wartości decyzji $x_0^*, x_1^*, \dots, x_{N-1}^*$,

$$x_0^* = G_0(y_0) \rightarrow y_1 = P(y_0, x_0^*)$$

$$x_1^* = G_1(y_1) \rightarrow y_2 = P(y_1, x_1^*)$$

⋮

$$x_{N-2}^* = G_{N-2}(y_{N-2}) \rightarrow y_{N-1} = P(y_{N-2}, x_{N-2}^*)$$

$$x_{N-1}^* = G_{N-1}(y_{N-1}) \rightarrow y_N = P(y_{N-1}, x_{N-1}^*)$$

Programowanie dynamiczne

Przykład: $y_{n+1} = P(y_n, x_n) = 2y_n + x_n$, $y_0 = 0$

$$\begin{aligned} Q(x_0, x_1, y_1, y_2) &= \sum_{n=0}^1 A_{n+1}(x_n, y_{n+1}) = \sum_{n=0}^1 (x_n^2 + (y_{n+1} - 5)^2) = \\ &= (x_0^2 + (y_1 - 5)^2) + (x_1^2 + (y_2 - 5)^2) \end{aligned}$$

Krok 1.

$$x_1^* \rightarrow \min_{x_1} (x_1^2 + (y_2 - 5)^2)$$

$$y_2 = 2y_1 + x_1$$

$$x_1^* = G_1(y_1) \rightarrow \min_{x_1} (x_1^2 + (2y_1 + x_1 - 5)^2)$$

$$2x_1^* + 2(2y_1 + x_1^* - 5) = 0 \Rightarrow x_1^* = G_1(y_1) = \frac{5}{2} - y_1$$

$$V_1(y_1) = \left(\frac{5}{2} - y_1\right)^2 + \left(2y_1 + \frac{5}{2} - y_1 - 5\right)^2 = 2\left(y_1 - \frac{5}{2}\right)^2$$

Programowanie dynamiczne

$$\text{Krok } x_0^* \rightarrow \min_{x_0} \left\{ \left(x_0^2 + (y_1 - 5)^2 \right) + 2 \left(y_1 - \frac{5}{2} \right)^2 \right\}$$

$$y_1 = 2y_0 + x_0$$

$$x_0^* = G_0(y_0) \rightarrow \min_{x_0} \left\{ \left(x_0^2 + (2y_0 + x_0 - 5)^2 \right) + 2 \left(2y_0 + x_0 - \frac{5}{2} \right)^2 \right\}$$

$$2x_0^* + 2(2y_0 + x_0^* - 5) + 4 \left(2y_0 + x_0^* - \frac{5}{2} \right) = 0 \Rightarrow x_0^* = G_0(y_0) = \frac{15}{8} - \frac{3}{2}y_0 = \frac{15}{8}$$

Teraz wracamy:

$$x_0^* = \frac{15}{8} \rightarrow y_1 = 2 \times 0 + \frac{15}{8} = \frac{15}{8}$$

$$x_1^* = \frac{5}{2} - \frac{15}{8} = \frac{5}{8} \rightarrow y_1 = 2 \times 0 + \frac{5}{8} = \frac{5}{8}$$

Dziękuję za uwagę

